Stockholms universitet
**Statistiska institutionen**
Raul Cano

SKRIVNINGSDATUM: 2012-08-22

Skriftlig tentamen i **Statistikens grunder 2** (6 hp), ingående som moment 3 i kursen **Statistikens grunder, GN, 15 hp.**

---

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon. Vidhäftade formel- och tabellblad.
Tentamensgenomgång och återlämning: Måndagen den 3 september, kl. 18.00 i B319. Därefter kan skrivningarna hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset.

---

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 100 poäng. För betyget A gäller 90-100 p., för betyget B gäller 80-89 p., för betyget C gäller 70-79 p., för betyget D gäller 60-69 p., för betyget E gäller 50-59 p., för betyget Fx gäller 40-49 p. och för betyget F gäller 0-39 p. För detaljerade betygskriterier se kursbeskrivningen på kurshemsidan.
**För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.**

---

**Uppgift 1:** (20 poäng)

a) Från en stor mängd sockerbetor utväljs ett slumpmässigt stickprov på 64 stycken, och sockerhalten (uttryckt i procent) bestäms för var och en. Det visar sig att den genomsnittliga sockerhalten är 19,53 och att standardavvikelsen är 1,25. Beräkna ett konfidensintervall med 99% konfidensgrad för den genomsnittliga sockerhalten i hela mängden sockerbetor. (10 p.)

b) Man tycker nu att det ovan erhållna konfidensintervallet blev för långt för att vara till praktisk nytta. Man önskar ett 99% konfidensintervall av längd 0,5. Beräkna (approximativt) hur stort stickprov som då skulle behövas. (10 p.)

**Uppgift 2:** (20 poäng)

Man har gjort fyra oberoende observationer på en normalfördelad stokastisk variabel med okänt väntevärde $\mu$ och okänd varians $\sigma^2$.
Resultat: 3 5 4 5

a) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för $\mu$ och tolka resultatet i ord. (10 p.)

b) Testa att $\mu > 4,5$. Sätt upp hypoteser, ange testvariabel och beslutsregel. Använd signifikansnivån 5%. Vilken blir din slutsats? (10 p.)

**Uppgift 3:** (20 poäng)

Studenter som läste Grundkursen i Statistik fördelades slumpmässigt i två grupper A och B. Grupperna använde olika kursböcker och olika undervisningsmetoder. Sluttentamen var densamma i båda grupperna och resultatet blev följande:

| | Antal studenter | Medelpoäng | Poängvarians |
|---|---|---|---|
| **Grupp A** | 16 | 62 | 42 |
| **Grupp B** | 9 | 58 | 35 |

a) Beräkna ett 99% konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$ och ange lämpliga förutsättningar för att konstruera konfidensintervallet. (10 p.)
b) Använd konfidensintervallet för att testa om $\mu_A - \mu_B \neq 0$. Vilken blir din slutsats? (10 p.)

**Uppgift 4:** (20 poäng)

Man ville från fackföreningshåll undersöka om det fanns ett beroende mellan ålder och inställningen till flexibla arbetstider. För ändamålet valde man ut ett obundet slumpmässigt urval på 400 personer i åldern 20-60 år och tillfrågade dem om ålder och inställning till flextider. Det visade sig att 200 av de tillfrågade var mellan 20 och 40 år och av dessa var 70 positiva, 60 tveksamma och 70 negativa till flextider. Av de 200 som var mellan 40 och 60 år var 50 positiva, 60 tveksamma och 90 negativa till flexibla arbetstider. Ställ upp hypoteser och testa på signifikansnivån 1% ($\alpha = 0{,}01$) om resultatet tyder på ett samband mellan ålder och inställning till flexibla arbetstider. Vilken blir din slutsats? (20 p.)

**Uppgift 5:** (20 poäng)

I ett företag arbetar man med ett projekt som syftar till att utveckla 4 nya produkter och (efter genomförande av en statistisk analys) välja en av de för fastproduktion. Företagsledningen har därför fyra alternativ att välja mellan: Produkt A, B, C och D. Lönsamheten för de olika produkterna är beroende av hur efterfrågan på de ingående produkterna blir. Ledningen har betraktat endast 4 olika typer av efterfrågan för varje produkt: E1, E2, E3 och E4. Marknadsundersökningsenheten (inom företaget) har bekräftat att om man väljer Produkt A räknar man med en vinst om 10 miljoner kronor (Mk) oavsett vilken typ av efterfrågan inträffar, medan om man väljer Produkt B blir vinsten 18 Mk, 18 Mk, 2 Mk respektive 10 Mk för efterfrågan E1, E2, E3 respektive E4. Motsvarande vinst för Produkt C är 2 Mk, 30 Mk, 0 Mk och 0 Mk och för Produkt D 10 Mk, 25 Mk, 2 Mk och 2 Mk.

Bestäm med hjälp av maximin- och minimax-regretkriterierna vilken produkt Företagsledningen bör välja. (20 p.)

# Formler

Räkneregler för väntevärden och varianser där $X$ och $Y$ är stokastiska variabler, $a$, $b$ och $c$ är konstanter:

$$\begin{aligned}
E(c) &= c \\
E(cX) &= cE(X) \\
E(c+X) &= c+E(X) \\
E(aX+bY) &= aE(X)+bE(Y) \\
V(c) &= 0 \\
V(cX) &= c^2V(X) \\
V(c+X) &= V(X) \\
V(aX+bY) &= a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov\,(X,Y)
\end{aligned}$$

Väntevärde och varians för urvalsmedelvärdet $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ där alla $X_1, X_2, ..., X_n$ är oberoende och har väntevärde $\mu$ och varians $\sigma^2$:

$$\begin{aligned}
E\left(\overline{X}\right) &= \mu \\
V\left(\overline{X}\right) &= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Ändlighetskorrektion:

$$\frac{N-n}{N-1}$$

Testvariabler:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

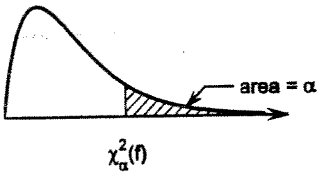
$$Z = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

$$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-D_0}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}, \quad \text{där } S_p^2 = \frac{(n-1)\,S_1^2+(m-1)\,S_2^2}{n+m-2}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

**Tabell 4.** $\chi^2$**-fördelningen**

$P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in \chi^2(f)$



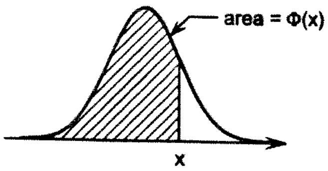

| $f$ | $\alpha$ 0.9995 | 0.999 | 0.995 | 0.99 | 0.975 | 0.95 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 | 10.83 | 12.12 |
| 2 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 | 13.82 | 15.20 |
| 3 | 0.02 | 0.02 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 | 16.27 | 17.73 |
| 4 | 0.06 | 0.09 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 | 18.47 | 20.00 |
| 5 | 0.16 | 0.21 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 | 20.52 | 22.11 |
| 6 | 0.30 | 0.38 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 | 22.46 | 24.10 |
| 7 | 0.48 | 0.60 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 | 24.32 | 26.02 |
| 8 | 0.71 | 0.86 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 | 26.12 | 27.87 |
| 9 | 0.97 | 1.15 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 | 27.88 | 29.67 |
| 10 | 1.26 | 1.48 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 | 29.59 | 31.42 |
| 11 | 1.59 | 1.83 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 | 31.26 | 33.14 |
| 12 | 1.93 | 2.21 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 | 32.91 | 34.82 |
| 13 | 2.31 | 2.62 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 | 34.53 | 36.48 |
| 14 | 2.70 | 3.04 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 | 36.12 | 38.11 |
| 15 | 3.11 | 3.48 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 | 37.70 | 39.72 |
| 16 | 3.54 | 3.94 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 | 39.25 | 41.31 |
| 17 | 3.98 | 4.42 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 | 40.79 | 42.88 |
| 18 | 4.44 | 4.90 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 | 42.31 | 44.43 |
| 19 | 4.91 | 5.41 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 | 43.82 | 45.97 |
| 20 | 5.40 | 5.92 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 | 45.31 | 47.50 |
| 21 | 5.90 | 6.45 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 | 46.80 | 49.01 |
| 22 | 6.40 | 6.98 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 | 48.27 | 50.51 |
| 23 | 6.92 | 7.53 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 | 49.73 | 52.00 |
| 24 | 7.45 | 8.08 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 | 51.18 | 53.48 |
| 25 | 7.99 | 8.65 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 | 52.62 | 54.95 |
| 26 | 8.54 | 9.22 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 | 54.05 | 56.41 |
| 27 | 9.09 | 9.80 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 | 55.48 | 57.86 |
| 28 | 9.66 | 10.39 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 | 56.89 | 59.30 |
| 29 | 10.23 | 10.99 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 | 58.30 | 60.73 |
| 30 | 10.80 | 11.59 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 | 59.70 | 62.16 |
| 40 | 16.91 | 17.92 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 | 73.40 | 76.09 |
| 50 | 23.46 | 24.67 | 27.99 | 29.71 | 32.36 | 34.76 | 67.50 | 71.42 | 76.15 | 79.49 | 86.66 | 89.56 |
| 60 | 30.34 | 31.74 | 35.53 | 37.48 | 40.48 | 43.19 | 79.08 | 83.30 | 88.38 | 91.95 | 99.61 | 102.69 |
| 70 | 37.47 | 39.04 | 43.28 | 45.44 | 48.76 | 51.74 | 90.53 | 95.02 | 100.43 | 104.21 | 112.32 | 115.58 |
| 80 | 44.79 | 46.52 | 51.17 | 53.54 | 57.15 | 60.39 | 101.88 | 106.63 | 112.33 | 116.32 | 124.84 | 128.26 |
| 90 | 52.28 | 54.16 | 59.20 | 61.75 | 65.65 | 69.13 | 113.15 | 118.14 | 124.12 | 128.30 | 137.21 | 140.78 |
| 100 | 59.90 | 61.92 | 67.33 | 70.06 | 74.22 | 77.93 | 124.34 | 129.56 | 135.81 | 140.17 | 149.45 | 153.17 |

# Tabeller

**Tabell 1. Standardiserad normalfördelning**

$\Phi(x) = P(X \leq x)$ där $X \in N(0, 1)$

För negativa värden, utnyttja att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

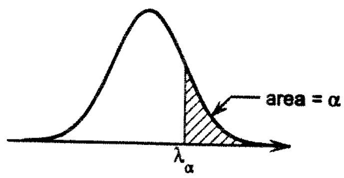


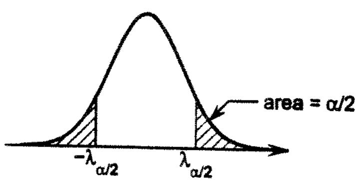

| $x$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .5040 | .5080 | .5120 | .5160 | .5199 | .5239 | .5279 | .5319 | .5359 |
| 0.1 | .5398 | .5438 | .5478 | .5517 | .5557 | .5596 | .5636 | .5675 | .5714 | .5753 |
| 0.2 | .5793 | .5832 | .5871 | .5910 | .5948 | .5987 | .6026 | .6064 | .6103 | .6141 |
| 0.3 | .6179 | .6217 | .6255 | .6293 | .6331 | .6368 | .6406 | .6443 | .6480 | .6517 |
| 0.4 | .6554 | .6591 | .6628 | .6664 | .6700 | .6736 | .6772 | .6808 | .6844 | .6879 |
| 0.5 | .6915 | .6950 | .6985 | .7019 | .7054 | .7088 | .7123 | .7157 | .7190 | .7224 |
| 0.6 | .7257 | .7291 | .7324 | .7357 | .7389 | .7422 | .7454 | .7486 | .7517 | .7549 |
| 0.7 | .7580 | .7611 | .7642 | .7673 | .7704 | .7734 | .7764 | .7794 | .7823 | .7852 |
| 0.8 | .7881 | .7910 | .7939 | .7967 | .7995 | .8023 | .8051 | .8078 | .8106 | .8133 |
| 0.9 | .8159 | .8186 | .8212 | .8238 | .8264 | .8289 | .8315 | .8340 | .8365 | .8389 |
| 1.0 | .8413 | .8438 | .8461 | .8485 | .8508 | .8531 | .8554 | .8577 | .8599 | .8621 |
| 1.1 | .8643 | .8665 | .8686 | .8708 | .8729 | .8749 | .8770 | .8790 | .8810 | .8830 |
| 1.2 | .8849 | .8869 | .8888 | .8907 | .8925 | .8944 | .8962 | .8980 | .8997 | .9015 |
| 1.3 | .9032 | .9049 | .9066 | .9082 | .9099 | .9115 | .9131 | .9147 | .9162 | .9177 |
| 1.4 | .9192 | .9207 | .9222 | .9236 | .9251 | .9265 | .9279 | .9292 | .9306 | .9319 |
| 1.5 | .9332 | .9345 | .9357 | .9370 | .9382 | .9394 | .9406 | .9418 | .9429 | .9441 |
| 1.6 | .9452 | .9463 | .9474 | .9484 | .9495 | .9505 | .9515 | .9525 | .9535 | .9545 |
| 1.7 | .9554 | .9564 | .9573 | .9582 | .9591 | .9599 | .9608 | .9616 | .9625 | .9633 |
| 1.8 | .9641 | .9649 | .9656 | .9664 | .9671 | .9678 | .9686 | .9693 | .9699 | .9706 |
| 1.9 | .9713 | .9719 | .9726 | .9732 | .9738 | .9744 | .9750 | .9756 | .9761 | .9767 |
| 2.0 | .97725 | .97778 | .97831 | .97882 | .97932 | .97982 | .98030 | .98077 | .98124 | .98169 |
| 2.1 | .98214 | .98257 | .98300 | .98341 | .98382 | .98422 | .98461 | .98500 | .98537 | .98574 |
| 2.2 | .98610 | .98645 | .98679 | .98713 | .98745 | .98778 | .98809 | .98840 | .98870 | .98899 |
| 2.3 | .98928 | .98956 | .98983 | .99010 | .99036 | .99061 | .99086 | .99111 | .99134 | .99158 |
| 2.4 | .99180 | .99202 | .99224 | .99245 | .99266 | .99286 | .99305 | .99324 | .99343 | .99361 |
| 2.5 | .99379 | .99396 | .99413 | .99430 | .99446 | .99461 | .99477 | .99492 | .99506 | .99520 |
| 2.6 | .99534 | .99547 | .99560 | .99573 | .99585 | .99598 | .99609 | .99621 | .99632 | .99643 |
| 2.7 | .99653 | .99664 | .99674 | .99683 | .99693 | .99702 | .99711 | .99720 | .99728 | .99736 |
| 2.8 | .99744 | .99752 | .99760 | .99767 | .99774 | .99781 | .99788 | .99795 | .99801 | .99807 |
| 2.9 | .99813 | .99819 | .99825 | .99831 | .99836 | .99841 | .99846 | .99851 | .99856 | .99861 |
| 3.0 | .99865 | | | | | | | | | |
| 3.1 | .99903 | | | | | | | | | |
| 3.2 | .99931 | | | | | | | | | |
| 3.3 | .99952 | | | | | | | | | |
| 3.4 | .99966 | | | | | | | | | |
| 3.5 | .99977 | | | | | | | | | |
| 3.6 | .99984 | | | | | | | | | |
| 3.7 | .99989 | | | | | | | | | |
| 3.8 | .99993 | | | | | | | | | |
| 3.9 | .99995 | | | | | | | | | |
| 4.0 | .99997 | | | | | | | | | |

**Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler**

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0, 1)$

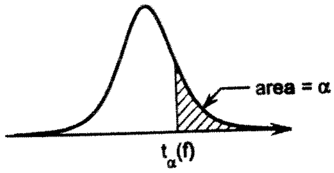
| $\alpha$ | $\lambda_\alpha$ | $\alpha$ | $\lambda_\alpha$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 1.2816 | 0.001 | 3.0902 |
| 0.05 | 1.6449 | 0.0005 | 3.2905 |
| 0.025 | 1.9600 | 0.0001 | 3.7190 |
| 0.01 | 2.3263 | 0.00005 | 3.8906 |
| 0.005 | 2.5758 | 0.00001 | 4.2649 |



**Tabell 3.** *t*-**fördelningen**

$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in t(f)$




| $f$ \ $\alpha$ | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3.08 | 6.31 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 318.31 | 636.62 |
| 2 | 1.89 | 2.92 | 4.30 | 6.96 | 9.92 | 22.33 | 31.60 |
| 3 | 1.64 | 2.35 | 3.18 | 4.54 | 5.84 | 10.21 | 12.92 |
| 4 | 1.53 | 2.13 | 2.78 | 3.75 | 4.60 | 7.17 | 8.61 |
| 5 | 1.48 | 2.02 | 2.57 | 3.36 | 4.03 | 5.89 | 6.87 |
| 6 | 1.44 | 1.94 | 2.45 | 3.14 | 3.71 | 5.21 | 5.96 |
| 7 | 1.41 | 1.89 | 2.36 | 3.00 | 3.50 | 4.79 | 5.41 |
| 8 | 1.40 | 1.86 | 2.31 | 2.90 | 3.36 | 4.50 | 5.04 |
| 9 | 1.38 | 1.83 | 2.26 | 2.82 | 3.25 | 4.30 | 4.78 |
| 10 | 1.37 | 1.81 | 2.23 | 2.76 | 3.17 | 4.14 | 4.59 |
| 11 | 1.36 | 1.80 | 2.20 | 2.72 | 3.11 | 4.02 | 4.44 |
| 12 | 1.36 | 1.78 | 2.18 | 2.68 | 3.05 | 3.93 | 4.32 |
| 13 | 1.35 | 1.77 | 2.16 | 2.65 | 3.01 | 3.85 | 4.22 |
| 14 | 1.35 | 1.76 | 2.14 | 2.62 | 2.98 | 3.79 | 4.14 |
| 15 | 1.34 | 1.75 | 2.13 | 2.60 | 2.95 | 3.73 | 4.07 |
| 16 | 1.34 | 1.75 | 2.12 | 2.58 | 2.92 | 3.69 | 4.01 |
| 17 | 1.33 | 1.74 | 2.11 | 2.57 | 2.90 | 3.65 | 3.97 |
| 18 | 1.33 | 1.73 | 2.10 | 2.55 | 2.88 | 3.61 | 3.92 |
| 19 | 1.33 | 1.73 | 2.09 | 2.54 | 2.86 | 3.58 | 3.88 |
| 20 | 1.33 | 1.72 | 2.09 | 2.53 | 2.85 | 3.55 | 3.85 |
| 21 | 1.32 | 1.72 | 2.08 | 2.52 | 2.83 | 3.53 | 3.82 |
| 22 | 1.32 | 1.72 | 2.07 | 2.51 | 2.82 | 3.50 | 3.79 |
| 23 | 1.32 | 1.71 | 2.07 | 2.50 | 2.81 | 3.48 | 3.77 |
| 24 | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.80 | 3.47 | 3.75 |
| 25 | 1.32 | 1.71 | 2.06 | 2.49 | 2.79 | 3.45 | 3.73 |
| 26 | 1.31 | 1.71 | 2.06 | 2.48 | 2.78 | 3.43 | 3.71 |
| 27 | 1.31 | 1.70 | 2.05 | 2.47 | 2.77 | 3.42 | 3.69 |
| 28 | 1.31 | 1.70 | 2.05 | 2.47 | 2.76 | 3.41 | 3.67 |
| 29 | 1.31 | 1.70 | 2.05 | 2.46 | 2.76 | 3.40 | 3.66 |
| 30 | 1.31 | 1.70 | 2.04 | 2.46 | 2.75 | 3.39 | 3.65 |
| 40 | 1.30 | 1.68 | 2.02 | 2.42 | 2.70 | 3.31 | 3.55 |
| 60 | 1.30 | 1.67 | 2.00 | 2.39 | 2.66 | 3.23 | 3.46 |
| 120 | 1.29 | 1.66 | 1.98 | 2.36 | 2.62 | 3.16 | 3.37 |
| ∞ | 1.28 | 1.64 | 1.96 | 2.33 | 2.58 | 3.09 | 3.29 |

(13)

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

# Rättningsblad

**Datum:** 22/8 - 2012

**Sal:** Laduvikssalen

**Tenta:** Statistikens grunder II

**Kurs:** Statistikens grunder, deltid

**ANONYMKOD:** RA-0019

**Markera besvarade uppgifter med kryss**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Antal inl. blad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | | | | | 9 ~~7~~ |
| Lär.ant. 20p | 20p | 20p | 20p | 20p | | | | | |

| POÄNG | BETYG | Lärarens sign. |
|---|---|---|
| 100p | A | RC |

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ______ Anonymkod: RA-0019 Blad nr: 1

1) 20p

Uppgift 1 a) 10p

Det stora stickprovet 64st gör att vi kan utnyttja CGS och därmed en Normalfördelning på sockerhalten även om betorna är av olika storlek.

Alltså är tillämpligt för KI:

$$KI: \bar{X} \pm Z_{\alpha/2 = \frac{1\%}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{n}}$$

$Z_{\alpha/2 = \frac{1\%}{2}}$ fås ur tabell till 2,5758

$n = 64$

$$\therefore KI \quad 19,53 \pm 2,5758 \sqrt{\frac{1.25^2}{64}}$$

$$19,53 \pm 0,40$$

K.I är alltså:

$$[19,13 , 19,93]$$

Svar: Ett KI med 99% konfidensgrad är $[19,13 , 19,93]$

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ____________ Anonymkod: RA-0019 Blad nr: 2

Uppgift 1(b) 1op

Från formel för KI dvs

$$\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$$ så ser vi

att konfidensintervallets längd

är $2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

En längd på 0.5 ger n vid ekvation.

Ekv:
$$2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{1,25^2}{n}} = 0.5$$

$$4 \cdot z_{\alpha/2}^2 \cdot \frac{1,25^2}{n} = 0,25$$

$$n = \frac{4}{0,25} \cdot z_{\alpha/2}^2 \cdot 1,25^2 = 16 \cdot 2,5758^2 \cdot 1,25^2$$

$$= 165,86 = [\text{upphöjt}]$$

$n \geq 166$ $= 166$

Svar: ~~För att erhålla~~ ett konfidensintervall med 99% konfidensgrad och längden 0,5 så behöver vi ett stickprov på 167.

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ______ Anonymkod: RA-0019 Blad nr: 3

2) 20p

Uppgift 2

a) 10p Oberoende och normalfördelade s.v. tillåter att t-fördelningen används.

Standardform för KI vid t-fördelning

KI: $\bar{x} \pm t_{\substack{\alpha/2 \\ df=n-1}} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}$

Ovan är $\alpha/2 = 2,5\%$ ty 95% KI efterfrågas

$n = 4$

$df = 4-1 = 3$

Beräkningstabla:

| $x$ | $x^2$ |
|---|---|
| 3 | 9 |
| 5 | 25 |
| 4 | 16 |
| 5 | 25 |
| $\sum x_i = 17$ | $\sum x^2 = 75$ |

$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{17}{4} = 4,2500$

$s^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum x^2 - \frac{1}{n}\left(\sum x\right)^2\right] =$

$= \frac{1}{3}\left[75 - \frac{17^2}{4}\right] = 0,9167$

R

Ur tabell finner vi $t_{(df=3\ \alpha/2=0,025)} = 3.18$

Insatt i formel ovan K.I: $4,25 \pm 3,18\sqrt{\frac{0,9167}{4}}$

KI: $4.25 \pm 1,522$

Dvs KI $[2,728; 5.772]$

Svar: Ett 95% KI är $[2,728; 5,772]$

R

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ____________ Anonymkod: RA-0019 Blad nr: 4

Uppgift 2b/ 10p

Hypotes $H_0$ $\mu = 4,5$

Mothypotes $H_a$ $\mu < 4,5$ Ensidigt test

Test statistika:

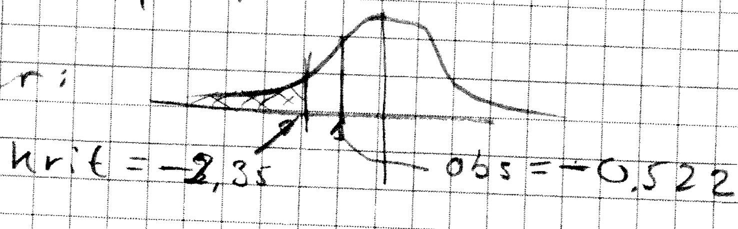
$$t = \frac{\bar{x} - 4,5}{s/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - 4,5}{\sqrt{s^2/n}}$$

Förkastelse område om $t_{obs} < -t_{\substack{\alpha=5\% \\ df=3}} = -2,35$ (tabell)

Insatta värden ger (från 2a)

$$t_{obs} = \frac{4,25 - 4,5}{\sqrt{\frac{0,9167}{4}}} = -0,522$$

Figur:




Vi ser att $t_{obs}$ ej ligger i förkastelseområdet och vi har ej skäl att förkasta $H_0$ på 5% nivå

Slutsats: $\mu$ kan på 5% nivån vara $\geq 4,5$

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ____________ Anonymkod: RA 0019 Blad nr: 5

3) 20p

Uppgift 3 a) 10p

Vi förutsätter att poängsättning för ett prov är approximativt normalfördelat. Dvs att även medelpoängen är approx normalfördelat.

Vi förutsätter även oberoende mellan poängsättning mellan parterna och gruppen.

Då kan vi utnyttja t fördelning med poolad stickprovsvarians.

Låt poäng i grupp A vara s.v. X

och poäng i grupp B vara s.v Y

Då 6lm KI:

$$\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\substack{0.01/2 \\ df = n_x + n_y - 2}} \cdot \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}\right)}$$

där $$S_p^2 = \frac{(n_x - 1)(S_x^2) + (n_y - 1) S_y^2}{n_x + n_y - 2} =$$

$$= \frac{15 \cdot 42 + 8 \cdot 35}{16 + 9 - 2} = 39,57$$

K

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ______ Anonymkod: RA 0019 Blad nr: 6

Uppgift 3a fortsättning

Vi har

$$KI \quad \bar{X}-\bar{Y} \pm t_{0{,}01/2} \cdot \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n_x}+\frac{1}{n_y}\right)}$$

$df = n_x + n_y - 2$

$\therefore df = 23$

Som med insatta värden blir

$$KI: \quad 62-58 \pm 2{,}81 \cdot \sqrt{39{,}57 \cdot \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{9}\right)}$$

$$KI: \quad 4 \pm 2{,}81 \cdot 2{,}62$$

$$KI: \quad 4 \pm 7{,}37 \Rightarrow KI: [-3{,}37; 11{,}37]$$

Svar: Ett K.I med 99% konfidensgrad för $\mu_A - \mu_B$ är $[-3{,}37, 11{,}37]$

R

Uppgift 3b) 1p

Hypotesprövningen anger $H_0: \mu_A = \mu_B$

dvs $\mu_A - \mu_B = 0$

Denna hypotes kan ej förkastas tg differensen (i detta fall Ø) ligger i de framräknade KI i uppgift 3a.

R

Svar: Testen ger att $\mu_A = \mu_B$.

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ______ Anonymkod: RA 0019 Blad nr: 7

4) 20p

Uppgift 4

Resultat tabell = tabell över observerat antal. $f_o$

| | POS. | TVEK. | Neg | |
|---|---|---|---|---|
| 20-40 år | 70 | 60 | 70 | 200 |
| 40-60 år | 50 | 60 | 90 | 200 |
| | 120 | 120 | 160 | 400 |

Jag tester med ett $\chi^2$ test att inställningen till flexible arbetstider är oberoende av ålderskategori:

Den förväntade fördelningen för likartad inställning är då

| | POS | TVEK. | Neg |
|---|---|---|---|
| 20-40 år | $200 \cdot \frac{120}{400} = 60$ | $200 \cdot \frac{120}{400} = 60$ | $200 \frac{160}{400} = 80$ |
| 40-60 år | $200 \cdot \frac{12}{400} = 60$ | $200 \cdot \frac{120}{400} = 60$ | $200 \frac{160}{400} = 80$ |

Tabellen över förväntat antal blir alltså: $f_e$

| | POS | TVEK | Neg. |
|---|---|---|---|
| 20-40 år | 60 | 60 | 80 |
| 40-60 å | 60 | 60 | 80 |

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ____________ Anonymkod: RA 0019 Blad nr: 8

Uppgift 4 forts.

Matrisen för $f_o - f_e$ blir

| | Pos | Tveh | Neg |
|---|---|---|---|
| 20-40 år | 70-60=10 | 60-60=0 | 70-80=-10 |
| 40-60 år | 50-60=-10 | 60-60=0 | 90-80=10 |

Hypotes $H_0$: samma fördelning i åldersgruppa

Mot Hypotes $H_1$: Olika fördelning

Som test funktionen väljs:

$$\chi^2_{obs} = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

Kritiskt värde för $\chi^2$ med $df = (r-1)(c-1) = (2-1)(3-1) = 2$, $\alpha = 0.01$

tas från tabell och värdet är 9.21

Om $\chi^2_{obs} > 9.21$ förkastas $H_0$ till förmån för $H_1$.

$$\chi^2_{obs} = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} = \frac{100}{60} + 0^2 + 0^2 + \frac{100}{60} + \frac{100}{80} + \frac{100}{80} = 5{,}83$$

Svar: Eftersom $\chi^2_{obs} < 9.81$ så finns det på 1% nivå inga skäl att förkasta $H_0$ utan fördelningen är samma i de båda ålderskategorierna

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: ______ Anonymkod: RA-0019 Blad nr: 9

5) 2 Op

Uppgift 5

Maximin först:

Efterfrågan

| Produkt | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | Minimal vinst per produkt |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| B | 18 | 18 | 2 | 10 | 2 |
| C | 2 | 30 | 0 | 0 | 0 |
| D | 10 | 25 | 2 | 2 | 2 |

maximal av dessa min är 10 för prod A

Del-Svar a): Maximin-kriteriet ger att företaget skall välja produkt A

R

~~Minimax-regret~~ utredning:

| $u_{ij}$ | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ |
|---|---|---|---|---|
| A | 10 | 10 | 10 | 10 |
| B | 18 | 18 | 2 | 10 |
| C | 2 | 30 | 0 | 0 |
| D | 10 | 25 | 2 | 2 |
| Max vinst | 18 | 30 | 10 | 10 |
| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ |

$v_j - u_{ij}$

Alternativkostnader

| E1 | E2 | E3 | E4 | Max altkostn |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 20 | 0 | 0 | 20 |
| 0 | 12 | 8 | 0 | 12 |
| 16 | 0 | 10 | 10 | 16 |
| 8 | 5 | 8 | 8 | 8 |

MiniMax-regret kriteriet innebär att valt alternativ skall vara det som minimerar den maximala alternativkostnaden.

Detta värde är 8.

R

Del Svar 2: Företaget skall välja produkt A för att uppnå MiniMax-regret kriteriet

7

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

# Rättningsblad

**Datum:** 22/8 - 2012

**Sal:** Laduvikssalen

**Tenta:** Statistikens grunder II

**Kurs:** Statistikens grunder, deltid

**ANONYMKOD:** RA - 007

**Markera besvarade uppgifter med kryss**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Antal inl. blad |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| X | X | X | X | X | | | | | 5 |
| Lär.ant. 20p | 20p | 20p | 20p | 20p | | | | | |

| POÄNG | BETYG | Lärarens sign. |
|---|---|---|
| 100p | A | RC |

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: Ladumkssalen Anonymkod: RA-007 Blad nr: 1

1) 20p

Uppgift 1

$n = 64$ $[>30]$

$\bar{x} = 19,53$ [i %]

$s = 1,25$

a) 10p

99% - KI $\Rightarrow z_{0,005} = 2,58$

$$\bar{x} \pm z_{0,005} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$19,53 \pm 2,58 \cdot \frac{1,25}{\sqrt{64}}$$

$$19,53 \pm 0,403$$

$$[19,13 ; 19,93]$$

R

R ⇐ 99% Konfidensgrads intervallet för den genomsnittliga sockerhalten i hela mängden sockerbetor, i procent.

b) 10p

$$B = 2\, z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

$$0,5 = 2 \cdot 2,58 \cdot \frac{1,25}{\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{n} \cdot 0,5 = 6,45$$

$$\sqrt{n} = 12,9$$

$$n = 166,41 \Rightarrow n \geq 166$$

Stickprovet av sockerbetor bör vara $n \geq 166$

R

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: Ladvikssalen  Anonymkod: RA-007  Blad nr: 2

2) 20p

Uppgift 2

10p

(a)

$n = 4 \quad [<30] \quad \sigma^2$ är okänd

$x_i : 3, 5, 4, 5$

95% - KI $\Rightarrow t_{\frac{\alpha}{2}, (n-1)} = t_{0,025;3} = 3,18$

$\bar{x} \pm t_{\frac{\alpha}{2},(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}}$ $\quad \bar{x} = 4,25$

$4,25 \pm 3,18 \cdot \frac{0,957}{\sqrt{4}}$ R

$s^2 = \frac{\sum x_i^2 - n(\bar{x})^2}{n-1} = \frac{75 - 72,25}{3} =$

$4,25 \pm 1,523$ $\quad = 0,9157$

$[2,73 : 5,77]$ R $\quad s = 0,957$

~~Det~~ 95% - Konfidensintervallet för $\mu = \bar{x}$

10p

(b)

$H_0 : \mu \leq 4,5 \quad \mu_0 = 4,5 \quad \alpha = 0,05$

$H_1 : \mu > 4,5$

$t_{0,05} = \frac{\mu_0 - \mu}{s / \sqrt{n}}$ $\quad t_{0,05;(4-1)} = 2,35$

$t = \frac{4,5 - 4,25}{0,957 / 2} = \frac{0,25}{0,4785} = 0,522 < 2,35$ R

$H_0$ kan ej förkastas. $\mu$ kan alltså ha ett mindre värde än 4,5.

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: Ladun. Anonymkod: RA-007 Blad nr: 3

3) 20p

Uppgift 3 A: $m = 16$ $\bar{x} = 62$ $s_x = 42$ $\mu_A = \bar{x}$

B: $n = 9$ $\bar{y} = 58$ $s_y = 35$ $\mu_B = \bar{y}$

10p

a) 99% -KI $t_{\frac{\alpha}{2};(m+n-2)} = t_{0,005;23} = 2,81$

$\mu_A - \mu_B \pm t_{\frac{\alpha}{2};(m+n-2)} \cdot \sqrt{s_p^2 \cdot \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}$

$s_p^2 = \frac{(m-1) \cdot s_x + (n-1) s_y}{m+n-2} = \frac{630 + 280}{23} = \underline{\underline{39,565}}$ R

$62 - 58 \pm 2,81 \cdot \sqrt{39,565 \cdot \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{9}\right)}$

$4 \pm 7,365$

R $[-3,37 ; 11,36]$ $\Leftarrow$ 99% konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$

[ ... $\bar{x} - \bar{y}$ ]

10p

b) 0 finns med i konfidensintervallet för det ett möjligt värde. Därför är $\mu_A - \mu_B = 0$ möjligt och $\mu_A - \mu_B \neq 0$ måste avfärdas.

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: Ladugårdsalen Anonymkod: RA-007 Blad nr: 4

4) 20p

Uppgift 4

$n = 400$ [730]

| | positiva | tveksamma | negativa | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|
| 20-40 | 70 / 60 | 60 / 60 | 70 / 80 | 200 |
| 40-60 | 50 / 60 | 60 / 60 | 90 / 80 | 200 |
| $\Sigma$ | 120 | 120 | 160 | 400 |

$\alpha = 0{,}01$

$$\chi^2 = \frac{(70-60)^2}{60} + \frac{(60-60)^2}{60} + \frac{(70-85)^2}{80}$$

$$+ \frac{(50-60)^2}{60} + \frac{(60-60)^2}{60} + \frac{(90-85)^2}{80}$$

$$= 1{,}67 + 0 + 1{,}25 + 1{,}67 + 0 + 1{,}25 = \underline{\underline{5{,}84}}$$

$$\chi^2_{\alpha,(r-1)(c-1)} = \chi^2_{0{,}01;2} = \underline{\underline{9{,}21}}$$

$H_0$: ej samband

$H_1$: Samband mellan ålder och flexibla tider

D: $5{,}84 < 9{,}21$ kan $H_0$ ej avfärdas. Med signifikansnivå 0,01 kan vi ej se om ålder och flexibla tider har ett samband eller inte.

**SU, STATISTIK**

Skrivsal: Ludvika Anonymkod: RA-007 Blad nr: 5

5) 2p

Uppgift 5

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| E 1 | 10 | 18 | 2 | 10 |
| E 2 | 10 | 18 | 30 | 25 |
| E 3 | 10 | 2 | 0 | 2 |
| E 4 | 10 | 10 | 0 | 2 |
| [illegible] | 10 | 16 | 30 | [illegible] |
| [illegible] | 10 | 2 | 0 | [illegible] |

Enligt båda maximin- och minimax-regelkriterierna väljer företagsledningen att producera produkt A.

R