



Stockholms
universitet
Statistiska institutionen
Raul Cano

SKRIVNINGSDATUM: 2013-02-07

Skriftlig tentamen i **Statistikens grunder 2** (6 hp), ingående som moment 3 i kursen **Statistikens grunder, GN, 15 hp**.

Skrivtid: 5 timmar

Hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon. Vidhäftade formel- och tabellblad.

Tentamensgenomgång och återlämning: Onsdagen den 20 februari, kl. 18.00 i B397.

Därefter kan skrivningarna hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset.

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 100 poäng. För betyget A gäller 90-100 p., för betyget B gäller 80-89 p., för betyget C gäller 70-79 p., för betyget D gäller 60-69 p., för betyget E gäller 50-59 p., för betyget Fx gäller 40-49 p. och för betyget F gäller 0-39 p. För detaljerade betygskriterier se kursbeskrivningen på kurshemsidan.

För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1: (20 poäng)

a) I ett land har man genomfört ett matematikprov bland 324 slumpmässigt utvalda 15-åringar. Maximalt kunde man uppnå 100 poäng på provet. Man fick stickprovsmedelvärdet 71.1 och stickprovsvariansen uppgick till 81. Testa på signifikansnivån 5% att populationsmedelvärdet $\mu=70$ mot alternativet att $\mu>70$. (10 p.)

b) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för μ och tolka resultatet i ord. (10 p.)

Uppgift 2: (20 poäng)

Man har gjort fyra oberoende observationer på en normalfördelad stokastisk variabel med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2 .

Resultat: 2 3 4 3

a) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för μ och tolka resultatet i ord. (10 p.)

b) Testa att $\mu > 2,6$. Sätt upp hypoteser, ange testvariabel och beslutsregel. Använd signifikansnivån 5%. Vilken blir din slutsats? (10 p.)

Uppgift 3: (20 poäng)

Studenter som läste Grundkursen i Statistik fördelades slumpmässigt i två grupper A och B. Grupperna använde olika kursböcker och olika undervisningsmetoder. Sluttentamen var densamma i båda grupperna och resultatet blev följande:

	Antal studenter	Medelpoäng	Poängvarians
Grupp A	25	82	49
Grupp B	16	78	36

- a) Beräkna ett 99%-igt konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$ och ange lämpliga förutsättningar för att konstruera konfidensintervallet. (10 p.)
- b) Använd konfidensintervallet för att testa om $\mu_A - \mu_B \neq 0$. Vilken blir din slutsats? (10 p.)

Uppgift 4: (20 poäng)

Man ville från fackföreningshåll undersöka om det fanns ett beroende mellan ålder och inställningen till flexibla arbetstider. För ändamålet valde man ut ett obundet slumpmässigt urval på 400 personer i åldern 20-60 år och tillfrågade dem om ålder och inställning till flexitider. Det visade sig att 200 av de tillfrågade var mellan 20 och 40 år och av dessa var 70 positiva, 60 tveksamma och 70 negativa till flexitider. Av de 200 som var mellan 40 och 60 år var 50 positiva, 60 tveksamma och 90 negativa till flexibla arbetstider. Ställ upp hypoteser och testa på signifikansnivån 1% ($\alpha = 0,01$) om resultatet tyder på ett samband mellan ålder och inställning till flexibla arbetstider. Vilken blir din slutsats? (20 p.)

Uppgift 5: (20 poäng)

I ett företag arbetar man med ett projekt som syftar till att utveckla 4 nya produkter och (efter genomförande av en statistisk analys) välja en av de för fastproduktion. Företagsledningen har därför fyra alternativ att välja mellan: Produkt A, B, C och D. Lönsamheten för de olika produkterna är beroende av hur efterfrågan på de ingående produkterna blir. Ledningen har betraktat endast 4 olika typer av efterfrågan för varje produkt: E1, E2, E3 och E4. Marknadsundersökningsenheten (inom företaget) har bekräftat att om man väljer Produkt A räknar man med en vinst om 10 miljoner kronor (Mk) oavsett vilken typ av efterfrågan inträffar, medan om man väljer Produkt B blir vinsten 18 Mk, 18 Mk, 2 Mk respektive 10 Mk för efterfrågan E1, E2, E3 respektive E4. Motsvarande vinst för Produkt C är 2 Mk, 30 Mk, 0 Mk och 0 Mk och för Produkt D 10 Mk, 25 Mk, 2 Mk och 2 Mk.

Bestäm med hjälp av maximin- och minimax-regretkriterierna vilken produkt Företagsledningen bör välja. (20 p.)

Formler

Räkne regler för väntevärden och varianser där X och Y är stokastiska variabler, a , b och c är konstanter:

$$\begin{aligned}E(c) &= c \\E(cX) &= cE(X) \\E(c + X) &= c + E(X) \\E(aX + bY) &= aE(X) + bE(Y) \\V(c) &= 0 \\V(cX) &= c^2V(X) \\V(c + X) &= V(X) \\V(aX + bY) &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov(X, Y)\end{aligned}$$

Väntevärde och varians för urvalsmedelvärdet $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ där alla X_1, X_2, \dots, X_n är oberoende och har väntevärde μ och varians σ^2 :

$$\begin{aligned}E(\bar{X}) &= \mu \\V(\bar{X}) &= \frac{\sigma^2}{n}\end{aligned}$$

Ändlighetskorrektion:

$$\frac{N - n}{N - 1}$$

Testvariabler:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

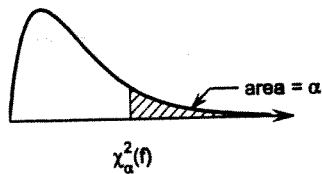
$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - D_0}{\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}}, \text{ där } S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$$

Tabell 4. χ^2 -fördelningen

$P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in \chi^2(f)$



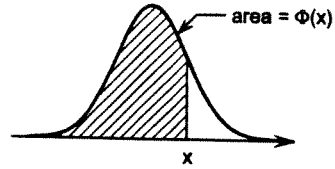
f	α	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1		0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2		0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3		0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4		0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5		0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6		0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7		0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8		0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9		0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10		1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11		1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12		1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13		2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14		2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15		3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16		3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17		3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18		4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19		4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20		5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21		5.90	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22		6.40	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23		6.92	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24		7.45	8.08	9.89	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25		7.99	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26		8.54	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27		9.09	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28		9.66	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29		10.23	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30		10.80	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40		16.91	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50		23.46	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60		30.34	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.69
70		37.47	39.04	43.28	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32	115.58
80		44.79	46.52	51.17	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84	128.26
90		52.28	54.16	59.20	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21	140.78
100		59.90	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.17

Tabeller

Tabell 1. Standardiserad normalfördelning

$\Phi(x) = P(X \leq x)$ där $X \in N(0, 1)$

För negativa värden, utnyttja att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

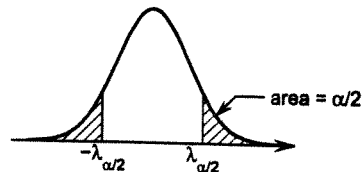
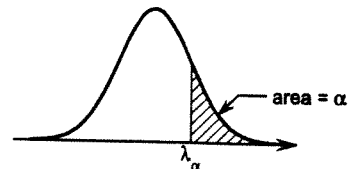


x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									
4.0	.99997									

Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler

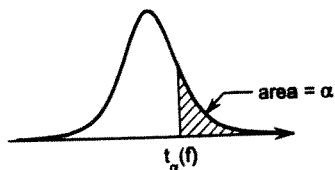
$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0, 1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.01	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649



Tabell 3. *t*-fördelningen

$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in t(f)$



<i>f</i>	α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1		3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2		1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3		1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4		1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5		1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6		1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7		1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8		1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9		1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10		1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11		1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12		1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13		1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14		1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15		1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16		1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17		1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18		1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19		1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20		1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21		1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22		1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23		1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24		1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25		1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26		1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27		1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28		1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29		1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30		1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40		1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60		1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120		1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞		1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

LÖSNINGAR/STATISTIKENS GRUNDER 2/2013-02-07

1a) $H_0: \mu = 70$ $H_1: \mu > 70$

FÖRKASTA H_0 OM $Z > Z_{\alpha} = Z_{0,05} = 1,6449$

$$\bar{z} = \frac{\bar{X} - 70}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{71,1 - 70}{\frac{9}{\sqrt{18}}} = 2(1,1) = 2,2 > 1,6449 \quad \underline{\text{FÖRKASTA } H_0}$$

1b) $\bar{X} \pm Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \quad 71,1 \pm (1,96) \cdot \frac{9}{\sqrt{18}} \quad 71,1 \pm 0,98$
 $[70,12 ; 72,08]$

2a) $\bar{x} = 3 \quad S^2 = \frac{2}{3} = 0,67 \quad t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)} = t_{0,025; 3} = 3,18$
 $\alpha = 0,05$

$$\bar{X} \pm t_{\frac{\alpha}{2}(n-1)} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \quad 3 \pm 3,18 \times \frac{0,82}{\sqrt{4}}$$

$3 \pm 1,30 \quad \text{KI} : [1,70 ; 4,30]$

2b) $H_0: \mu \leq 2,6 \quad H_A: \mu > 2,6$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{3 - 2,6}{\frac{0,816496561}{\sqrt{41}}} = \frac{0,4}{0,40824829} = 0,979795898$$

FÖRKASTA H_0 OM $0,97 = t \geq t_{0,05}(3) = 2,35$

H_0 EJ FÖRKASTAS

$$3a) \quad \bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2(n+m-2)} \cdot \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$$

$$t_{\alpha/2(n+m-2)} = t_{\frac{0,01}{2}(25+16-2)} = t_{0,005(39)} \approx 2,70$$

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2 + (m-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{24 \times 49 + 15 \times 36}{39} = \frac{1176 + 540}{39} = \frac{1716}{39} = 44$$

$$\sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)} = \sqrt{44 \times \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{16} \right)} = \sqrt{44 \times \frac{16+25}{400}} = \sqrt{44 \times \frac{41}{400}} =$$

$$= \sqrt{4,51} = 2,123676058$$

$$(82-78) \pm (2,70) \times (2,123) \quad 4 \pm 5,7321$$

$$\boxed{[-1,7321 ; +9,7321]}$$

3b) 0 INGÅR I KI

DET BETYDER ATT MAN KAN INTE UTESLUTA

$$\text{ATT } \mu_A - \mu_B = 0$$

ELLER

DET GICK INTE ATT VISA ATT $\mu_A - \mu_B \neq 0$

① H_0 : ÅLDERN OCH INSTÄLLNINGEN TILL FLEXTIDER ÄR OBEROENDE (EJ SAMBAND)
 H_1 : ÅLDERN OCH INSTÄLLNINGEN TILL FLEXTIDER ÄR BERORANDE (SAMBAND)

MAN FÖRKASTAR H_0 OM $\chi^2 > \chi^2_{\alpha} (r-1)(c-1)$
 $\alpha = 0,01$

	POS.	TVEK.	NEG.	
20-40	70	60	70	200
40-60	50	60	90	200
	120	120	160	$n=400$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{100}{60} + \frac{100}{80} + \frac{100}{60} + \frac{100}{80} = 5,8333$$

$$\chi^2_{0,01}(2) = \chi^2_{0,01}(2) = 9,21$$

EFTEROM $\chi^2 < \chi^2_{0,01}(2)$ H_0 FÖRKASTAS ✓

SLUTSATS: DET GICK INTE ATT PÅVISA ATT
 DET FINNS ETT BERORANDE MELLAN ÅLDERN OCH
 INSTÄLLNINGEN TILL FLEXTIDER ($\alpha = 0,01$).

5

	E1	E2	E3	E4	MAXIM(W)	MINIMAX-REGRET
A	10-10=0 10 MK	10 MK	10 MK	10 MK	10	0
B	18-18=0 18 MK	18-18=0 18 MK	18-2=16 2 MK	18-10=8 10 MK	2	16
C	30-2=28 2 MK	30-30=0 30 MK	30-0=30 0 MK	30-0=30 0 MK	0	30
D	25-10=15 10 MK	25-25=0 25 MK	25-2=23 2 MK	25-2=23 2 MK	2	23

4a

A

4b

A



Stockholms
universitet

Statistiska institutionen

Rättningsblad

Datum: 7/2 - 2013

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikens grunder 2

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD:



OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
✓	✓	✓	✓	✓					7
Lär.ant. 20p	20p	10p	20p	20p					

POÄNG 90p	BETYG A	Lärarens sign. RC
---------------------	-------------------	-----------------------------

20p

1. a) $\alpha = 0,05$ $\bar{X} = 71,1$ $S^2 = 81$ $S = 9$ $n = 324$

$H_0: \mu = 70$ μ är 70 (Ingen ändlighetskorrigering behövs
då populationen antas gå mot ∞)
 $H_A: \mu > 70$ μ större än 70

Enkelsidig mothypotes vilket innebär att jag
nämntar värdet 1,64 på signifikansnivån 0,05.

Testvariabel:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_x} \quad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma_x)$$

Beslutsregel: Förkasta H_0 om $Z_{obs} > Z_{0,05}$

Beräkning: $Z = \frac{71,1 - 70}{9/\sqrt{324}} = \underline{2,20}$

Svar: Förkasta H_0 på 0,05 signifikansnivå

b) $\bar{X} = 71,1$ $\alpha = 0,05 \Rightarrow 1,96$ (Dubbla svansar)
 $n = 324$

Konfidensintervall (95%):

$$\bar{X} \pm 1,96 \cdot \sigma_x$$

Svar: $71,1 \pm 1,96 \cdot \frac{9}{\sqrt{324}} = [70,1; 72,1]$

Med 95% säkerhet ligger populationens resultat mellan
70,1 : 72,1

2) 20p

$$2a) \mu_{skattad} = \frac{(2+3+4+3)}{4} = 3 \quad R$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n-1} = \left((2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2 \right) \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{2}{3} \quad R$$

$$s = \sqrt{2/3} = 0,816 \quad R$$

95% konfidensintervall, hämtas från t-tabell då $n < 30$
 $t_{0,025}(n-1) = 3,18 \quad R$

Formel: $\mu_s \pm t_{0,025} s_x$ $\mu_s = \bar{x}$

Beräkning: $3 \pm 3,18 \cdot \frac{0,816}{\sqrt{4}} = [1,7; 4,3]$

Konfidensintervall = $[1,7; 4,3]$ R

Svar: Med 95% sannolikhet ligger observationerna mellan 1,7 och 4,3.

och sänd

R

$$2b) \quad \bar{x} = 3 \quad \alpha = 0,05 \quad n = 4 \quad X \sim N(\mu, \sigma_x)$$

$H_0: \mu \leq 2,6$ Mindre eller lika med 2,6

$H_A: \mu > 2,6$ Större än 2,6

Testvariabel: $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ $t_{0,05(n-1)} = 2,35$

Beslutsregel: Förfasta H_0 om $t_{obs} > 2,35$

Beräkning: $t = \frac{3 - 2,6}{0,816/2} = 0,98$

Svar: H_0 går ej att förfasta på 0,05 signifikansnivå. Ligger inom intervall $-2,35 - 2,35$

3) 10p

3a) Förutsättningar:

Normalfördelad, oberoende population med egenskapen där indrivningarna är olika.

$$n_x = 25 \quad n_y = 16 \quad \bar{x} = 82 \quad \bar{y} = 78$$

$$s_x^2 = 49 \quad s_y^2 = 36$$

Konfidensintervall: Använd Z-tabell då n_x och n_y har kända varianser $Z_{0,005} = 2,576$

$$\begin{aligned} \text{Konfidensintervall: } & \bar{x} - \bar{y} \pm Z \sqrt{\left(\frac{s_x^2}{n_x} + \frac{s_y^2}{n_y} \right)} \\ & = 82 - 78 \pm 2,576 \cdot \sqrt{\left(\frac{49}{25} + \frac{36}{16} \right)} \\ & = 4 \pm 5,29 \end{aligned}$$

Svar $[-1,29; 9,29]$ (99% konfidensintervall) för $\mu_A - \mu_B$

(Konfidensintervall kan tolkas som att $\mu_A - \mu_B$ ligger med 99% säkerhet inom intervallet $[-1,29; 9,29]$)

FEL METOD

3a) Ger

5p

3b)

$$H_0: \mu_A - \mu_B = 0$$

$$H_A: \mu_A - \mu_B \neq 0$$

$$\alpha = 0,01$$

$$Z_{0,005} = 2,576$$

$$\text{Testvariabel: } \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}}}$$

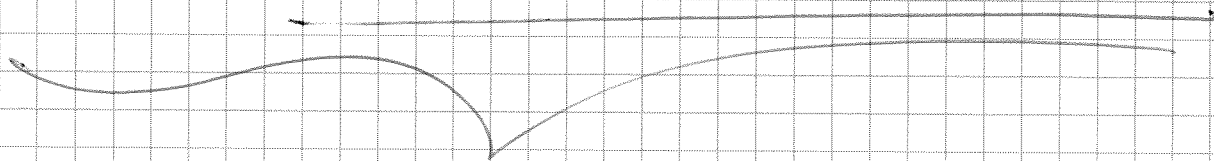
Beslutsregel: Förtäkta H_0 om $Z_{\text{obs}} > 2,576$

$$\text{Beräkning: } \frac{82 - 78}{\sqrt{\left(\frac{49}{25} + \frac{36}{16}\right)}} = 1,95$$

Svar H_0 kan ej förkastas på 0,01 ↗ $\frac{\alpha}{2} = 0,005$
signifikansnivå

Ligger inom intervall $-2,576 - 2,576$

0 ligger inom angivet intervall!



FEL METOD

3b) Ger SP

4) 20p

4. $\alpha = 0,01$ χ^2 -homogenhets test

Börjar med att sätta upp mätvärdena i en tabell:

	Positiva	Tveksamma	Negativa	Summa
20-40	70	60	70	200
40-60	50	60	90	200
Summa	120	120	160	400

- Antal frihetsgrader:
 $(2-1) \cdot (3-1) = 2$

Hypoteser: H_0 : Det finns ingen beroende

Testvariabel: $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$ $\chi^2_{2-(0,01)} = 9,21$

Beslutsregel: Förkasta H_0 om $\chi^2_{obs} > 9,21$

Förväntade värden: Ex på uträkning $\frac{200}{400} \cdot 120 = 60$

	Positiva	Tveksamma	Negativa	Summa
20-40	60	60	80	200
40-60	60	60	80	200
	120	120	160	400

Vänd →

$$\chi^2 = \frac{(70-60)^2}{60} + 0 + \frac{(70-80)^2}{80} + \frac{(50-60)^2}{60} + 0 + \frac{(90-80)^2}{80}$$

$= 5,83$

Svar: H_0 kan ej förkastas på 0,01 signifikansnivå eftersom 5,83 ej är större än 9,21.
Det finns inget beroende.

5) 20 p

5. Börjar med att ställa upp en beslutsmatrix:

		S_1	S_2	S_3	S_4
A	A_1	10	10	10	10
B	A_2	18	18	2	10
C	A_3	2	30	0	0
D	A_4	10	25	2	2

Maximin kriteriet innebär en pessimistisk syn på maximalt regret, dvs förlust. Man skall alltså välja ut de största förlusterna för varje handling (A_i) och därefter välja ut det minsta alternativet av dessa.

I detta fall:

		S_1	S_2	S_3	S_4	max regret
A	A_1	10	10	10	10	10
B	A_2	18	18	2	10	2
C	A_3	2	30	0	0	0
D	A_4	10	25	2	2	2

Minimax innebär att vi skall välja A_3 då A_3 ger den lägsta förlusten.

5) Minimax innebär också ett pessimistiskt tänk där man skall välja ut det största av de minsta (vinsterna), min regnet.

I detta fall:

	S ₁	S ₂	S ₃	S ₄	Val minmax	
A	A ₁	10	10	10	10	
B	A ₂	18	18	2	10	18 (18)
C	A ₃	2	30	0	0	30
D	A ₄	10	25	2	2	25

ME
MEN
SE FACIT

Svar enligt minmax-kriteriet ska man välja handling A₁

Summering:

Enligt båda kriterierna ska man välja A₁, alltså produkt A.

7

Statistiska institutionen



Stockholms
universitet

Rättningsblad

Datum: 7/2 - 2013

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikers grunder 2

Kurs: Statistikers grunder

ANONYMKOD:



OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>					2
Lär.ant. 10p	20p	18p	20p	20p					

POÄNG 88p	BETYG B	Lärarens sign. RC
---------------------	-------------------	-----------------------------

① $n = 324$
 $\bar{x} = 71,1$
 $s = 81$

$H_0 \quad \mu = 70$
 $H_A \quad \mu > 70$

R

$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{71,1 - 70}{\frac{81}{\sqrt{324}}} = \frac{1,1}{4,5} = 0,244$

$z_{\alpha} = z_{0,05} = 1,64$

$0,244 = z < z_{\alpha} \quad 1,64$

Ej förkastas

b) $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$
 $71,1 \pm 1,96 \cdot \frac{81}{\sqrt{324}}$

$z_{\alpha/2} = \frac{0,05}{2} = 0,025$

$71,1 \pm 8,82$

$[62,28 ; 79,92]$

Vår längd för vår intervall är $\cdot 17,64$.

1) GER 10p

2

2) 20p

$$a) \bar{x} = \frac{2+3+4+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$s^2 = \frac{(2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2}{4-1} = 0,667 = s \sqrt{0,667}$$

$$s = 0,8167$$

$$t_{0,05/2}(4-1) = 0,025(3)$$

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2}(n-1) \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3 \pm 3,18 \frac{0,8167}{\sqrt{4}}$$

$$3 \pm 1,2985 \Rightarrow [1,701; 4,2985] \quad | \quad R$$

SE blir vår konfidensintervall med ett 95%-igt

$$b) H_0: \mu \leq 2,6$$

$$H_A: \mu > 2,6$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{3 - 2,6}{0,8167/\sqrt{4}} = \frac{0,4}{0,4082} = 0,97991$$

$$t_{\alpha}(n-1) = t_{0,05}(3) = 2,35$$

$t > t_{\alpha}$ Ej förkastas. | R

3

3) 18p

a) $\bar{x} = 82$
 $\bar{y} = 78$

$n_x = 25$
 $n_y = 16$

$s_x^2 = 49$
 $s_y^2 = 36$

$z_{\alpha/2} = \frac{0,01}{2}$
 $= 2,5758$

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} = \frac{(25-1)49 + (16-1)36}{25+16-2} = \frac{1716}{39} = 44$$

a) 10p = $\frac{(24 \cdot 49) + (15 \cdot 36)}{41-2} = \frac{1716}{39} = 44$

BRA!

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right)}$$

$$82 - 78 \pm 2,5758 \cdot \sqrt{44 \left(\frac{1}{25} + \frac{1}{16} \right)}$$

$$4 \pm 2,5758 \cdot \sqrt{4,51}$$

$4 \pm 5,4701$

$[-1,4701; 9,4701]$ BRA!

b) Med konfidensintervallet kan vi säga att

$\mu_A - \mu_B \neq 0$

↑
 -2p

b) ~~10p~~ 8p

④ n 400

4) 20p

	Positiva	tväksamma	Negativa	
20-40 år	70 ⁽⁶⁰⁾	60 ⁽⁶⁰⁾	70 ⁽⁸⁰⁾	200
40-60 år	50 ⁽⁶⁰⁾	60 ⁽⁶⁰⁾	90 ⁽⁸⁰⁾	200
Σ	120	120	160	400

$$X^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

$$X^2 = \frac{(70-60)^2}{60} + \frac{(50-60)^2}{60} + \dots + \frac{(70-80)^2}{80} + \frac{(90-80)^2}{80}$$

$$= 1,667 + 1,667 + 1,25 + 1,25 = 5,834$$

frihetsgr. = $\frac{3-1}{2-1} = 2$ $2 \cdot 1 = 2$

$X_{\alpha}^2(F)$ $X_{0,01}^2(2) = 9,21$

$5,834 = X^2 < X_{\alpha}^2 = 9,21$ Ej förkastas

⑤ 5) 20p

	E ₁ <small>10-10=0</small>	E ₂	E ₃	E ₄	Maximin	Minimax
A	10	10	10	10	10	0
B	18	18	2	10	2	16
C	2	30	0	0	0	30
D	10	25	2	2	2	23

Maximin = A

Minimax = A