Stockholms universitet
Statistiska institutionen
Raul Cano

SKRIVNINGSDATUM: 2013-02-07

Skriftlig tentamen i **Statistikens grunder 2** (6 hp), ingående som moment 3 i kursen **Statistikens grunder, GN, 15 hp.**

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Miniräknare, språklexikon. Vidhäftade formel- och tabellblad.
Tentamensgenomgång och återlämning: Onsdagen den 20 februari, kl. 18.00 i B397.
Därefter kan skrivningarna hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset.

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 100 poäng. För betyget A gäller 90-100 p., för betyget B gäller 80-89 p., för betyget C gäller 70-79 p., för betyget D gäller 60-69 p., för betyget E gäller 50-59 p., för betyget Fx gäller 40-49 p. och för betyget F gäller 0-39 p. För detaljerade betygskriterier se kursbeskrivningen på kurshemsidan.
För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1: (20 poäng)

a) I ett land har man genomfört ett matematikprov bland 324 slumpmässigt utvalda 15-åringar. Maximalt kunde man uppnå 100 poäng på provet. Man fick stickprovsmedelvärdet 71.1 och stickprovsvariansen uppgick till 81. Testa på signifikansnivån 5% att populationsmedelvärdet $\mu=70$ mot alternativet att $\mu>70$. (10 p.)

b) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för μ och tolka resultatet i ord. (10 p.)

Uppgift 2: (20 poäng)

Man har gjort fyra oberoende observationer på en normalfördelad stokastisk variabel med okänt väntevärde μ och okänd varians σ^2.
Resultat: 2 3 4 3

a) Beräkna ett 95%-igt konfidensintervall för μ och tolka resultatet i ord. (10 p.)

b) Testa att $\mu > 2{,}6$. Sätt upp hypoteser, ange testvariabel och beslutsregel. Använd signifikansnivån 5%. Vilken blir din slutsats? (10 p.)

Uppgift 3: (20 poäng)

Studenter som läste Grundkursen i Statistik fördelades slumpmässigt i två grupper A och B. Grupperna använde olika kursböcker och olika undervisningsmetoder. Sluttentamen var densamma i båda grupperna och resultatet blev följande:

	Antal studenter	Medelpoäng	Poängvarians
Grupp A	25	82	49
Grupp B	16	78	36

a) Beräkna ett 99%-igt konfidensintervall för $\mu_A - \mu_B$ och ange lämpliga förutsättningar för att konstruera konfidensintervallet. (10 p.)
b) Använd konfidensintervallet för att testa om $\mu_A - \mu_B \neq 0$. Vilken blir din slutsats? (10 p.)

Uppgift 4: (20 poäng)

Man ville från fackföreningshåll undersöka om det fanns ett beroende mellan ålder och inställningen till flexibla arbetstider. För ändamålet valde man ut ett obundet slumpmässigt urval på 400 personer i åldern 20-60 år och tillfrågade dem om ålder och inställning till flextider. Det visade sig att 200 av de tillfrågade var mellan 20 och 40 år och av dessa var 70 positiva, 60 tveksamma och 70 negativa till flextider. Av de 200 som var mellan 40 och 60 år var 50 positiva, 60 tveksamma och 90 negativa till flexibla arbetstider. Ställ upp hypoteser och testa på signifikansnivån 1% ($\alpha = 0{,}01$) om resultatet tyder på ett samband mellan ålder och inställning till flexibla arbetstider. Vilken blir din slutsats? (20 p.)

Uppgift 5: (20 poäng)

I ett företag arbetar man med ett projekt som syftar till att utveckla 4 nya produkter och (efter genomförande av en statistisk analys) välja en av de för fastproduktion. Företagsledningen har därför fyra alternativ att välja mellan: Produkt A, B, C och D. Lönsamheten för de olika produkterna är beroende av hur efterfrågan på de ingående produkterna blir. Ledningen har betraktat endast 4 olika typer av efterfrågan för varje produkt: E1, E2, E3 och E4. Marknadsundersökningsenheten (inom företaget) har bekräftat att om man väljer Produkt A räknar man med en vinst om 10 miljoner kronor (Mk) oavsett vilken typ av efterfrågan inträffar, medan om man väljer Produkt B blir vinsten 18 Mk, 18 Mk, 2 Mk respektive 10 Mk för efterfrågan E1, E2, E3 respektive E4. Motsvarande vinst för Produkt C är 2 Mk, 30 Mk, 0 Mk och 0 Mk och för Produkt D 10 Mk, 25 Mk, 2 Mk och 2 Mk.

Bestäm med hjälp av maximin- och minimax-regretkriterierna vilken produkt Företagsledningen bör välja. (20 p.)

Formler

Räkneregler för väntevärden och varianser där X och Y är stokastiska variabler, a, b och c är konstanter:

$$\begin{aligned}
E(c) &= c \\
E(cX) &= cE(X) \\
E(c+X) &= c+E(X) \\
E(aX+bY) &= aE(X)+bE(Y) \\
V(c) &= 0 \\
V(cX) &= c^2V(X) \\
V(c+X) &= V(X) \\
V(aX+bY) &= a^2V(X)+b^2V(Y)+2abCov\,(X,Y)
\end{aligned}$$

Väntevärde och varians för urvalsmedelvärdet $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ där alla $X_1, X_2, ..., X_n$ är oberoende och har väntevärde μ och varians σ^2:

$$\begin{aligned}
E\left(\overline{X}\right) &= \mu \\
V\left(\overline{X}\right) &= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Ändlighetskorrektion:

$$\frac{N-n}{N-1}$$

Testvariabler:

$$Z = \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

$$t = \frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

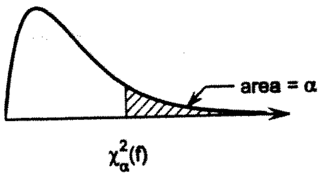
$$Z = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-D_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{m}}}$$

$$t = \frac{\overline{X}-\overline{Y}-D_0}{\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}}, \quad \text{där } S_p^2 = \frac{(n-1)\,S_1^2+(m-1)\,S_2^2}{n+m-2}$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$$

Tabell 4. χ^2**-fördelningen**

$P(X > \chi^2_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in \chi^2(f)$



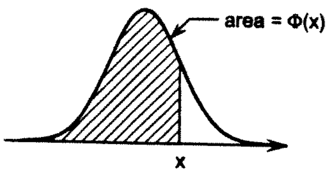
f \ α	0.9995	0.999	0.995	0.99	0.975	0.95	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83	12.12
2	0.00	0.00	0.01	0.02	0.05	0.10	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82	15.20
3	0.02	0.02	0.07	0.11	0.22	0.35	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27	17.73
4	0.06	0.09	0.21	0.30	0.48	0.71	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47	20.00
5	0.16	0.21	0.41	0.55	0.83	1.15	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52	22.11
6	0.30	0.38	0.68	0.87	1.24	1.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46	24.10
7	0.48	0.60	0.99	1.24	1.69	2.17	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32	26.02
8	0.71	0.86	1.34	1.65	2.18	2.73	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12	27.87
9	0.97	1.15	1.73	2.09	2.70	3.33	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88	29.67
10	1.26	1.48	2.16	2.56	3.25	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59	31.42
11	1.59	1.83	2.60	3.05	3.82	4.57	19.68	21.92	24.72	26.76	31.26	33.14
12	1.93	2.21	3.07	3.57	4.40	5.23	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91	34.82
13	2.31	2.62	3.57	4.11	5.01	5.89	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53	36.48
14	2.70	3.04	4.07	4.66	5.63	6.57	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12	38.11
15	3.11	3.48	4.60	5.23	6.26	7.26	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70	39.72
16	3.54	3.94	5.14	5.81	6.91	7.96	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25	41.31
17	3.98	4.42	5.70	6.41	7.56	8.67	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79	42.88
18	4.44	4.90	6.26	7.01	8.23	9.39	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31	44.43
19	4.91	5.41	6.84	7.63	8.91	10.12	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82	45.97
20	5.40	5.92	7.43	8.26	9.59	10.85	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31	47.50
21	5.90	6.45	8.03	8.90	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80	49.01
22	6.40	6.98	8.64	9.54	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27	50.51
23	6.92	7.53	9.26	10.20	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73	52.00
24	7.45	8.08	9.89	10.86	12.40	13.85	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18	53.48
25	7.99	8.65	10.52	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62	54.95
26	8.54	9.22	11.16	12.20	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05	56.41
27	9.09	9.80	11.81	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48	57.86
28	9.66	10.39	12.46	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89	59.30
29	10.23	10.99	13.12	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30	60.73
30	10.80	11.59	13.79	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70	62.16
40	16.91	17.92	20.71	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40	76.09
50	23.46	24.67	27.99	29.71	32.36	34.76	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66	89.56
60	30.34	31.74	35.53	37.48	40.48	43.19	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61	102.69
70	37.47	39.04	43.28	45.44	48.76	51.74	90.53	95.02	100.43	104.21	112.32	115.58
80	44.79	46.52	51.17	53.54	57.15	60.39	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84	128.26
90	52.28	54.16	59.20	61.75	65.65	69.13	113.15	118.14	124.12	128.30	137.21	140.78
100	59.90	61.92	67.33	70.06	74.22	77.93	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45	153.17

Tabeller

Tabell 1. Standardiserad normalfördelning

$\Phi(x) = P(X \leq x)$ där $X \in N(0, 1)$

För negativa värden, utnyttja att $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$

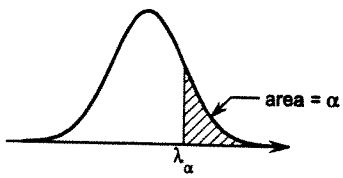


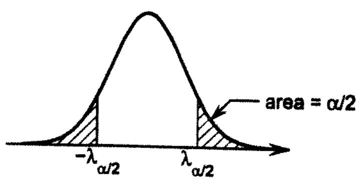
x	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865									
3.1	.99903									
3.2	.99931									
3.3	.99952									
3.4	.99966									
3.5	.99977									
3.6	.99984									
3.7	.99989									
3.8	.99993									
3.9	.99995									
4.0	.99997									

Tabell 2. Normalfördelningens kvantiler

$P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0, 1)$

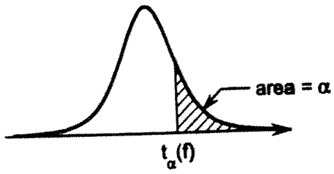
α	λ_α	α	λ_α
0.1	1.2816	0.001	3.0902
0.05	1.6449	0.0005	3.2905
0.025	1.9600	0.0001	3.7190
0.01	2.3263	0.00005	3.8906
0.005	2.5758	0.00001	4.2649





Tabell 3. *t*-**fördelningen**

$P(X > t_\alpha(f)) = \alpha$ där $X \in t(f)$



f \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	318.31	636.62
2	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	22.33	31.60
3	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	10.21	12.92
4	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	7.17	8.61
5	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03	5.89	6.87
6	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	5.21	5.96
7	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.79	5.41
8	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	4.50	5.04
9	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	4.30	4.78
10	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	4.14	4.59
11	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	4.02	4.44
12	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.93	4.32
13	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.85	4.22
14	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.79	4.14
15	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.73	4.07
16	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.69	4.01
17	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.65	3.97
18	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.61	3.92
19	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.58	3.88
20	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.55	3.85
21	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.53	3.82
22	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.50	3.79
23	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.48	3.77
24	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.47	3.75
25	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.45	3.73
26	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.43	3.71
27	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.42	3.69
28	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.41	3.67
29	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.40	3.66
30	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.39	3.65
40	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	3.31	3.55
60	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66	3.23	3.46
120	1.29	1.66	1.98	2.36	2.62	3.16	3.37
∞	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	3.09	3.29

LÖSNINGAR / STATISTIKENS GRUNDER 2 / 2013-02-07

1a) $H_0: \mu = 70 \quad H_1: \mu > 70$

FÖRKASTA H_0 OM $Z > Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,6449$

$$Z = \frac{\bar{X} - 70}{s/\sqrt{n}} = \frac{71,1 - 70}{9/18} = 2(1,1) = 2,2 > 1,6449 \quad \underline{\text{FÖRKASTA } H_0}$$

1b) $\bar{X} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \qquad 71,1 \pm (1,96) \cdot \frac{9}{18} \qquad 71,1 \pm 0,98$

$[70,12 \; ; \; 72,08]$

2a) $\bar{X} = 3 \qquad S^2 = \frac{2}{3} = 0,67 \qquad t_{\alpha/2(n-1)} = t_{0,025;3} = 3,18$

$\underline{\alpha = 0,05}$

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2(n-1)} \times \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad 3 \pm 3,18 \times \frac{0,82}{\sqrt{4}}$$

$3 \pm 1,30 \qquad$ KI : $\underline{[1,70 \; ; \; 4,30]}$

2b) $H_0: \mu \leq 2,6 \qquad H_A: \mu > 2,6$

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{3 - 2,6}{\frac{0,816496581}{\sqrt{4}}} = \frac{0,4}{0,40824829} = 0,979795898$$

FÖRKASTA H_0 OM $0,97 = t \geq t_{0,05(3)} = 2,35$

H_0 EJ FÖRKASTAS

3a) $\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2(n+m-2)} \cdot \sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)}$

$t_{\alpha/2(n+m-2)} = t_{\frac{0,01}{2}}(25+16-2) = t_{0,005}(39) \approx 2,70$

$S_p^2 = \frac{(n-1)S_1^2+(m-1)S_2^2}{n+m-2} = \frac{24 \times 49 + 15 \times 36}{39} = \frac{1176+540}{39} = \frac{1716}{39} = 44$

$\sqrt{S_p^2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)} = \sqrt{44 \times \left(\frac{1}{25}+\frac{1}{16}\right)} = \sqrt{44 \times \frac{16+25}{400}} = \sqrt{44 \times \frac{41}{400}} =$

$= \sqrt{4,51} = 2,123676058$

$(82-78) \pm (2,70) \times (2,123)$ $\quad 4 \pm 5,7321$

$\left[-1,7321 \; ; \; +9,7321\right]$

3b) 0 INGÅR i KI

DET BETYDER ATT MAN KAN INTE UTESLUTA

ATT $\mu_A - \mu_B = 0$

ELLER

DET GICK INTE ATT VISA ATT $\mu_A - \mu_B \neq 0$

8) H_0: ÅLDERN OCH INSTÄLLNINGEN TILL FLEXTIDER ÄR OBEROENDE (EJ SAMBAND)

H_1: ÅLDERN OCH INSTÄLLNINGEN TILL FLEXTIDER ÄR BEROENDE (SAMBAND)

MAN FÖRKASTAR H_0 OM $\chi^2 > \chi^2_\alpha([r-1]\cdot[k-1])$

$\alpha = 0,01$

	POS.	TVEK.	NEG	
20-40	70 (60)	60 (60)	70 (80)	200
40-60	50 (60)	60 (60)	90 (80)	200
	120	120	160	n=400

$$\chi^2 = \sum \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{100}{60} + \frac{100}{80} + \frac{100}{60} + \frac{100}{80} = 5,8333$$

$$\chi^2_{0,01}(1\cdot 2) = \chi^2_{0,01}(2) = 9,21$$

EFTERSOM $\chi^2 \not> \chi^2_{0,01}(2)$ H_0 FÖRKASTAS EJ.

SLUTSATS: DET GICK INTE ATT PÅVISA ATT DET FANNS ETT BEROENDE MELLAN ÅLDER OCH INSTÄLLNINGEN TILL FLEXTIDER ($\alpha = 0,01$).

(5)

	E1	E2	E3	E4	MAXIMIN	MINIMAX-REGRET
A	10-10=0 10 MK	10 MK	10 MK	10 MK	10	0
B	18-18=0 18 MK	18-18=0 18 MK	18-2=16 2 MK	18-10=8 10 MK	2	16
C	30-2=28 2 MK	30-30=0 30 MK	30-0=30 0 MK	30-0=30 0 MK	0	30
D	25-10=15 10 MK	25-25=0 25 MK	25-2=23 2 MK	25-2=23 2 MK	2	23

(4a) A

(4b) A

(6)

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 7/2 - 2013

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikens grunder 2

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: SGO-0023

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					7
Lär.ant. 20p	20p	10p	20p	20p					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
90p	A	RC

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SGU-0023 Blad nr: 1

20p

1. a) $\alpha = 0{,}05$ $\bar{X} = 71{,}1$ $S^2 = 81$ $S = 9$ $n = 324$

$H_0: \mu = 70$ μ är 70 (Ingen ändlighetskorrigering behöv då populationen antas gå mot ∞)

$H_A: \mu > 70$ μ större än 70

Enkelsidig mothypotes vilket innebär att jag hämtar värdet 1,64 på signifikansnivån 0,05.

Testvariabel:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} \qquad \bar{X} \sim N(\mu, \sigma_{\bar{x}})$$

Beslutsregel: Förkasta H_0 om $Z_{obs} > Z_{0,05}$

Beräkning: $$Z = \frac{71{,}1 - 70}{9/\sqrt{324}} = 2{,}20$$

Svar: Förkasta H_0 på 0,05 signifikansnivå

---

b) $\bar{X} = 71{,}1$ $\alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1{,}96$ (Dubbla svansar)

$n = 324$

Konfidensintervall (95%):

$$\bar{X} \pm 1{,}96 \cdot \sigma_{\bar{x}}$$

Svar: $71{,}1 \pm 1{,}96 \cdot 9/\sqrt{324} = [70{,}1 ; 72{,}1]$

Med 95% säkerhet ligger populationens resultat ~~inom~~

$[70{,}1 ; 72{,}1]$

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SGU-0023 Blad nr: 2

9) 20p

2a) $\mu_{skattad} = \frac{(2+3+4+3)}{4} = 3$ R

$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 \cdot \frac{1}{n-1} = \left((2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (3-3)^2\right) \cdot \frac{1}{4-1} = \frac{2}{3}$ R

$S = \sqrt{2/3} = 0{,}816$ R

95% konfidensintervall, hämtas från t-tabell då n<30 1 och σ okänd

$t_{0,025(n-1)} = 3{,}18$ R

Formel: $\mu_s \pm t_{0,025} S_x$ $\mu_s = \bar{x}$

Beräkning: $3 \pm 3{,}18 \cdot \frac{0{,}816}{\sqrt{4}} = [1{,}7 ; 4{,}3]$ R

Konfidensintervall $= [1{,}7 ; 4{,}3]$ R

Svar: Med 95% ~~sannolikhet~~ KONFIDENS ligger observationerna mellan 1,7 och 4,3. R

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SGO-0023 Blad nr: 3

2b) $\bar{X} = 3$ $\alpha = 0{,}05$ $n = 4$ $X \sim N(\mu, \sigma_x)$

$H_0: \mu \leq 2{,}6$ Mindre eller likamed 2,6

$H_A: \mu > 2.6$ Större än 2,6

Testvariabel: $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ $t_{0{,}05(n-1)} = 2{,}35$

Beslutsregel: Förkasta Ho om $t_{obs} > 2{,}35$

Beräkning: $t = \dfrac{3 - 2{,}6}{0{,}816/2} = 0{,}98$

Svar: Ho går ej att förkasta på 0,05 signifikansnivå. Ligger inom intervall $-2{,}35 - 2{,}35$

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SGO-0023 Blad nr: 4

3) 10p

3a) Förutsättningar:

Normalfördelad, oberoende population med egenskapen där individerna är olika.

$n_x = 25$ $n_y = 16$ $\bar{x} = 82$ $\bar{y} = 78$

$S_x^2 = 49$ $S_y^2 = 36$

Konfidensintervall: Använd Z-tabell då n_x och n_y har kända varianser $Z_{0,005} = 2,576$

Konfidensintervall: $\bar{x} - \bar{y} \pm Z \sqrt{\left(\frac{S_x^2}{n_x} + \frac{S_y^2}{n_y}\right)}$

$= 82 - 78 \pm 2,576 \cdot \sqrt{\left(\frac{49}{25} + \frac{36}{16}\right)}$

$= 4 \pm 5,29$

Svar $[-1,29;\ 9,29]$ (99% konfidensintervall) för $\mu_A - \mu_B$

(Konfidensintervallet kan tolkas som att $\mu_A - \mu_B$ ligger med 99% säkerhet inom intervallet $[-1,29;\ 9,29]$

FEL METOD

3a) Ger 5p

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SGO-0023 Blad nr: 5

3b) $H_0: \mu_A - \mu_B = 0$ $H_A: \mu_A - \mu_B \neq 0$

$\alpha = 0{,}01$ $z_{0{,}005} = 2{,}576$

Testvariabel: $\dfrac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_x^2}{n_x} + \dfrac{S_y^2}{n_y}}}$

Beslutsregel: Förkasta H_0 om $Z_{obs} > 2{,}576$

Beräkning: $\dfrac{82 - 78}{\sqrt{\left(\dfrac{49}{25} + \dfrac{36}{16}\right)}} \approx 1{,}95$

$\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$

Svar H_0 kan ej förkastas på 0,01 signifikans-nivå

Ligger inom intervall $-2{,}576 - 2{,}576$

0 ligger inom angivet intervall!

FEL METOD

3b) Ger 5P

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SG0-0023 Blad nr: 6

4) 20p

4. $a = 0,01$ χ^2-homogenitetstest

Börjar med att sätta upp mätvärdena i en tabell:

	Positiva	Tveksamma	Negativa	Summa
20-40	70	60	70	200
40-60	50	60	90	200
Summa	120	120	160	400

Antal frihetsgrader:
$(2-1)\cdot(3-1) = 2$

R

Hypoteser: H_0: Det finns ingel beroende

Testvarrabel: $\chi^2 = \sum \frac{(O-E)^2}{E}$ $\chi^2_{2-(0,01)} = 9,21$

Beslutsregel: Förkasta $\cancel{H}_0$ om $\chi^2_{obs} > 9,21$

R

Förväntade värden: Ex på uträkning $\frac{200}{400} \cdot 120 = 60$

	Positiva	Tveksamma	Negativa	Summa
20-40	60	60	80	200
40-60	60	60	80	200
	120	120	160	400

R

Vänd →

$$X^2 = \frac{(70-60)^2}{60} + 0 + \frac{(70-80)^2}{80} +$$

$$\frac{(50-60)^2}{60} + 0 + \frac{(90-80)^2}{80}$$

$$= 5,83$$

Svar: H_0 kan ej förkastas på 0,01 signifikansnivå ettersom 5,83 ej är större än 9,21.
Det finns inget beroende.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsviken Anonymkod: SGU-0023 Blad nr: 7

5) 20p

5. Börjar med att ställa upp en beslutsmatris:

		S_1	S_2	S_3	S_4
A	A_1	10	10	10	10
B	A_2	18	18	2	10
C	A_3	2	30	0	0
D	A_4	10	25	2	2

Maximin kriteriet innebär en pessimistisk syn på maximal regret, dvs förlust. Man skall alltså välja ut de största förlusterna för varje handling (A_i) och därefter välja ut det minsta alternativet av dessa.

I detta fall:

		S_1	S_2	S_3	S_4	Max regret
A	A_1	10	10	10	10	10
B	A_2	18	18	2	10	2
C	A_3	2	30	0	0	0
D	A_4	10	25	2	2	2

Minimax innebär att vi skall välja A_1 då A_1 ger den lägsta förlusten.

Vänd →

5) Minimax innebär också ett pessimistiskt tänk där man skall välja ut det största av de minsta (vinsterna), min regret.

I detta fall:

		S_1	S_2	S_3	S_4	Val minimax
A	A_1	10	10	10	10	10
B	A_2	18	18	2	10	~~18~~ (18)
C	A_3	2	30	0	0	30
D	A_4	10	25	2	2	25

R

MEN (SE FACIT)

Svar enligt minimax-kriteriet ska man välja handling A_1

Summering:
Enligt båda kriterierna ska man välja A_1, alltså produkt A.

R

(7)

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 7/2 - 2013

Sal: Brunnsvikssalen

Tenta: Statistikens grunder 2

Kurs: Statistikens grunder

ANONYMKOD: SGO-0050

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					2
Lär.ant. 10p	20p	18p	20p	20p					

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
88p	B	RC

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: 560-0050 Blad nr: 1

(1)

$n = 324$

$\bar{x} = 71{,}1$

$s = 81$

$H_0 \quad \mu = 70$

$H_A \quad \mu > 70$

R

$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{71{,}1 - 70}{9 = 81/\sqrt{324}} = \frac{1{,}1}{4{,}5} = 0{,}244$

$Z_\alpha = Z_{0{,}05} = 1{,}64$ R

$0{,}244 = Z > Z_\alpha \; 1{,}64$ Ej Förkastas F

b) $\bar{x} \pm Z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

$Z_{\alpha/2} = 0{,}05/2 = 0{,}025$

R R

$71{,}1 \pm 1{,}96 \cdot \frac{81}{\sqrt{64}} = 9$

$71{,}1 \pm 8{,}82$

$[62{,}28 ; 79{,}92]$ F

Vår läng för vår intervallet är 17,64.

1) GER 10p

② 2) 20p

a) $\bar{X} = \frac{2+3+4+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$

$s^2 = \frac{(2-3)^2+(3-3)^2+(4-3)^2+(3-3)^2}{4-1} = 0,667 = s\sqrt{0,667}$

$s = 0,8167$ $t_{0,05/2}(4-1) = 0,025(3)$

$\bar{X} \pm t_{\alpha/2(n-1)} \frac{s}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3 \pm 3,18 \frac{0,8167}{\sqrt{4}}$

$3 \pm 1,2985 \Rightarrow [1,701; 4,2985]$

Så blir vår konfidensintervall med ett 95%-igt

b) H_0 $\mu \leq 2,6$

H_A $\mu > 2,6$

$t = \frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{3-2,6}{0,8164/\sqrt{4}} = \frac{0,4}{0,4082} = 0,97991$

$t_{\alpha}(n-1) = t_{0,05}(3) = 2,35$

$t > t_{\alpha}$ Ej förkastas.

SU, STATISTIK

Skrivsal: Brunnsvikssalen Anonymkod: SGO-0050 Blad nr: 2

3) 18p

(3)

a) $\bar{x} = 82$ $n_x = 25$ $s_x^2 = 49$

$\bar{y} = 78$ $n_y = 16$ $s_y^2 = 36$

$z_{\alpha/2} = \frac{0{,}01}{2} = 0{,}005$

$$s_p^2 = \frac{(n-1)s_1^2 + (m-1)s_2^2}{n+m-2} = \frac{(25-1)49 + (16-1)36}{25+16-2} =$$

a) 10p

$$= \frac{(24 \cdot 49) + (15 \cdot 36)}{41-2} = \frac{1716}{39} = 44$$

BRA!

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{s_p^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}$$

$$82 - 78 \pm 2{,}5758 \cdot \sqrt{44\left(\frac{1}{25} + \frac{1}{16}\right)}$$

$$4 \pm 2{,}5758 \cdot \sqrt{4{,}51}$$

$$4 \pm 5{,}4701$$

$$[-1{,}4701;\ 9{,}4701]$$

BRA!

b) med konfidensintervallet kan ~~vi~~ inte visa ~~garat~~ att

$$\mu_A - \mu_B \neq 0$$

-2p

b) 8p

④ n 400   4) 20p

	Positiva	tveksamma	Negativa	
20-40 år	70 (60)	60 (60)	70 (80)	200
40-60 år	50 (60)	60 (60)	90 (80)	200
Σ	120	120	160	400

$$\chi^2 = \frac{\Sigma (O-E)^2}{E}$$

$$\chi^2 = \frac{(70-60)^2}{60} + \frac{(50-60)^2}{60} + \ldots + \frac{(70-80)^2}{80} + \frac{(90-80)^2}{80} =$$

$$= 1{,}667 + 1{,}667 + 1{,}25 + 1{,}25 = 5{,}834$$ R

frihetsgr = $\frac{3-1}{2-1} = \frac{2}{1}$ $2 \cdot 1 = 2$

χ^2_2 (f) $\chi^2_{0,01(2)} = 9{,}21$ R

$5{,}834 = \chi^2 > \chi^2_2 = 9{,}21$ R Ej förkastas

⑤ 5) 20p

	E_1	E_2	E_3	E_4	Maximin	Minimax
A	10 (10-10=0)	10	10	10	10	0
B	18 (18-2=16)	18	2	10	2	16
C	2	30 (30-0=30)	0	0	0	30
D	10	25 (25-2=23)	2	2	2	23

R

Maximin = A

Minimax = A

R