Stockholms universitet
Statistiska institutionen
Raul Cano

SKRIVNINGSDATUM: 28-11-2019

Skriftlig tentamen i **Statistikens grunder 1** (6 hp), ingående som moment 1 i kursen **Statistikens grunder, GN, 15 hp.**

Skrivtid: 5 timmar
Hjälpmedel: Miniräknare utan lagrade formler eller lagrad text. Vidhäftade formel- och tabellblad (obs! vidhäftas endast de tabellsidor som behövs för den här tentamen).
Återlämning av tentamen: hämtas på studentexpeditionen, plan 7 i B-huset fr.o.m. fredagen den 13 december. Kolla på vår hemsida studentexpeditionens mottagningstider under terminstid.

Tentamen består av fem uppgifter som kan ge totalt 100 poäng. För betyget A gäller 90-100 p., för betyget B gäller 80-89 p., för betyget C gäller 70-79 p., för betyget D gäller 60-69 p., för betyget E gäller 50-59 p., för betyget Fx gäller 40-49 p. och för betyget F gäller 0-39 p. För detaljerade betygskriterier se kursbeskrivningen på kurshemsidan.

Obs! För full poäng på en uppgift krävs fullständiga och väl motiverade lösningar.

Uppgift 1: (20 poäng)
I den stora staden Grönköping och med hjälp av empiriska data har man konstruerat nedanstående sannolikhetsmodell. Målpopulationen består av alla röstberättigade personer som bor i Grönköping. Modellen beskriver utbildningsnivå X (antal år studerat efter gymnasieutbildning) med motsvarande sannolikheter.

Antal år	0	1	2	3	4	5	6
Sannolikhet	0,05	0,10	0,25	0,30	0,20	0,05	0,05

a). Beräkna variansen för X. (5 poäng)
b). Beräkna $E(X^3)$. (5 poäng)

En person väljs slumpmässigt.
c). Vad är sannolikheten att den valda personen har studerat mer än 3 år efter gymnasieutbildning? (5 poäng)
d). Man har information att den valda personen har studerat mindre än 5 år efter gymnasieutbildning. Vad är sannolikheten att den personen har studerat 2 år efter gymnasieutbildning? (5 poäng)

Uppgift 2: (20 poäng)
I den stora staden Grönköping har 15 % av invånarna sjukdom A. Ett test för denna sjukdom ger ett positivt resultat för 80 % av de sjuka personerna och ett negativt resultat för 90 % av de friska personerna.

a). Beräkna sannolikheten att en sjuk person får ett negativt testresultat. (5 poäng)

b). Beräkna sannolikheten att en frisk person får ett positivt testresultat. (5 poäng)

c). Beräkna sannolikheten att en slumpmässigt vald person ska få ett positivt testresultat. (10 poäng)

Uppgift 3: (20 poäng)

I den stora staden Grönköping är 40 % av de vuxna invånarna positivt inställda till byggandet av en ny ishall. Målpopulationen består av alla vuxna invånare i Grönköping.
Ur målpopulation drar man ett slumpmässigt stickprov på 20 personer. Hur stor är sannolikheten att stickprovet skall innehålla

a). högst 15 personer som är positivt inställda? (5 poäng)
b). precis 9 personer som är positivt inställda? (5 poäng)
c). minst 10 personer som är positivt inställda? (5 poäng)
d). högst 5 personer som **inte** är positivt inställda? (5 poäng)

Uppgift 4: (20 poäng)

I den stora staden Grönköping vill man studera blodsockernivå hos alla röstberättigade personer som bor i staden. Mätningar görs i måttenheten mmol/l (utom i USA där mg/dl används). Man antar att blodsockernivån följer en normalfördelning med väntevärdet 8 och standardavvikelsen 2.
a). Enligt modellen, hur stor andel personer har en blodsockernivå över 7? (5 poäng)
b). Enligt modellen, hur stor andel personer har en blodsockernivå mellan 5 och 9? (5 poäng)
c). Fyra personer väljs ut slumpmässigt. Vad är sannolikheten att 3 av dem har en blodsockernivå över 6? (10 poäng)

Uppgift 5: (20 poäng)

I den stora staden Grönköping undersöker man om det föreligger ett samband mellan månadsinkomst i tusentals kronor (X) och antal sjukdagar (Y) som har tagits per år bland alla anställda i staden.
Man föreslår följande förenklade sannolikhetsmodell för X och Y:

	x=20	30	40
y= 5	0,30	0,20	0,15
10	0,10	0,15	0,10

a). Enligt modellen, påvisa att X och Y är beroende eller oberoende. (5 poäng)
b). Ange den betingade sannolikhetsfördelningen för Y givet att X = 30. (5 poäng)
c). Beräkna korrelationen mellan X och Y. (10 poäng)

FORMELBLAD FÖR STATISTIKENS GRUNDER 1

KOMBINATORIK

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

SANNOLIKHETSLÄRA

Additionssatsen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Multiplikationssatsen:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\,P(B) = P(B \mid A)\,P(A)$$

Satsen om total sannolikhet:

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)\,P(B_i)$$

Bayes sats:

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)\,P(B_1)}{\sum_i P(A|B_i)\,P(B_i)}$$

MEDELVÄRDE, VARIANS, KOVARIANS, KORRELATION

Väntevärde för en diskret stokastisk variabel X:

$$E(X) = \sum_x x f(x)$$

Varians för en diskret stokastisk variabel X:

$$V(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 f(x) = \sum_x x^2 f(x) - [E(X)]^2$$

Kovarians mellan två diskreta stokastiska variabler X och Y:

$$Cov\,(X,Y) = \sum_x \sum_y [x - E\,(X)]\,[y - E\,(Y)]\, f_{X,Y}\,(x,y) = \sum_x \sum_y xy f_{X,Y}\,(x,y) - E\,(X)\,E\,(Y)$$

Korrelation mellan två diskreta stokastiska variabler X och Y:

$$\rho = Corr\,(X,Y) = \frac{Cov\,(X,Y)}{\sqrt{(V(X)V(Y))}}$$

RÄKNEREGLER

Räkneregler för väntevärden och varianser (a och b är konstanter, X och Y är stokastiska variabler):

$$\begin{aligned}
E(aX + bY) &= aE(X) + bE(Y) \\
E(aX - bY) &= aE(X) - bE(Y) \\
V(aX + bY) &= a^2V(X) + b^2V(Y) + 2abCov\,(X,Y) \\
V(aX - bY) &= a^2V(X) + b^2V(Y) - 2abCov\,(X,Y)
\end{aligned}$$

FÖRDELNINGAR

Binomialfördelningen:

$$f\,(x) = \binom{n}{x} p^x\,(1-p)^{n-x} \qquad \text{för } x = 0, 1, ..., n; \quad 0 < p < 1$$

$$\mu_X = np \qquad \sigma_X^2 = np(1-p)$$

STANDARDISERING

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\
Z &\sim N(0,1)
\end{aligned}$$

INDEX

$I_t^b = \frac{x_t}{x_b} 100$ $\qquad$ $I_t^b = \frac{I_t^0}{I_b^0} 100$

Laspeyres index:

$$L_t^0 = \frac{\sum_{i=1}^N p_{ti} q_{0i}}{\sum_{i=1}^N p_{0i} q_{0i}} \cdot 100$$

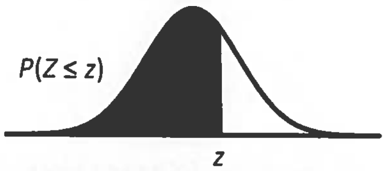
Paasches index:

$$P_t^0 = \frac{\sum_{i=1}^N p_{ti} q_{ti}}{\sum_{i=1}^N p_{0i} q_{ti}} \cdot 100$$

TABELL 1. Normalfördelningen, standardiserad

$\Phi(z) = P(Z \leq z)$ där $Z \in N(0, 1)$.

För negativa värden, utnyttja att $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

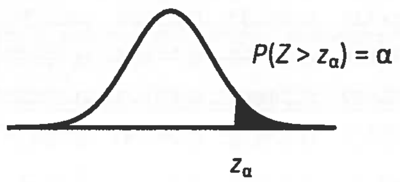


z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56749	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59483	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67364	0,67724	0,68082	0,68439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76730	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
1,0	0,84134	0,84375	0,84614	0,84849	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92785	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95818	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96246	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0,96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,97441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97778	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98745	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0,99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

TABELL 2. Normalfördelningens kvantiler, standardiserad

$Z \in N(0, 1)$. Vilket värde har z_α om $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ där α är en given sannolikhet.

Utnyttja även $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ för $P(Z \le -z_\alpha)$.



α	z_α
0,25	0,6745
0,10	1,2816
0,05	1,6449
0,025	1,9600
0,010	2,3263
0,005	2,5758
0,0025	2,8070
0,0010	3,0902
0,0005	3,2905
0,00025	3,4808
0,00010	3,7190
0,00005	3,8906
0,000025	4,0556
0,000010	4,2649
0,000005	4,4172

TABELL 7. Binomial-fördelningen; $n = 2 - 9$

$P(X \leq x)$ där $X \in Bin(n, p)$. För $p > 0{,}5$, utnyttja att $P(X \leq x) = P(Y \geq n\text{-}x)$ där $Y \in Bin(n, 1\text{-}p)$

n	*x*	*p* = 0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
2	0	0,90250	0,81000	0,72250	0,64000	0,56250	0,49000	0,42250	0,36000	0,30250	0,25000
	1	0,99750	0,99000	0,97750	0,96000	0,93750	0,91000	0,87750	0,84000	0,79750	0,75000
3	0	0,85738	0,72900	0,61413	0,51200	0,42188	0,34300	0,27463	0,21600	0,16638	0,12500
	1	0,99275	0,97200	0,93925	0,89600	0,84375	0,78400	0,71825	0,64800	0,57475	0,50000
	2	0,99988	0,99900	0,99663	0,99200	0,98438	0,97300	0,95713	0,93600	0,90888	0,87500
4	0	0,81451	0,65610	0,52201	0,40960	0,31641	0,24010	0,17851	0,12960	0,09151	0,06250
	1	0,98598	0,94770	0,89048	0,81920	0,73828	0,65170	0,56298	0,47520	0,39098	0,31250
	2	0,99952	0,99630	0,98802	0,97280	0,94922	0,91630	0,87352	0,82080	0,75852	0,68750
	3	0,99999	0,99990	0,99949	0,99840	0,99609	0,99190	0,98499	0,97440	0,95899	0,93750
5	0	0,77378	0,59049	0,44371	0,32768	0,23730	0,16807	0,11603	0,07776	0,05033	0,03125
	1	0,97741	0,91854	0,83521	0,73728	0,63281	0,52822	0,42842	0,33696	0,25622	0,18750
	2	0,99884	0,99144	0,97339	0,94208	0,89648	0,83692	0,76483	0,68256	0,59313	0,50000
	3	0,99997	0,99954	0,99777	0,99328	0,98438	0,96922	0,94598	0,91296	0,86878	0,81250
	4	1,00000	0,99999	0,99992	0,99968	0,99902	0,99757	0,99475	0,98976	0,98155	0,96875
6	0	0,73509	0,53144	0,37715	0,26214	0,17798	0,11765	0,07542	0,04666	0,02768	0,01563
	1	0,96723	0,88574	0,77648	0,65536	0,53394	0,42018	0,31908	0,23328	0,16357	0,10938
	2	0,99777	0,98415	0,95266	0,90112	0,83057	0,74431	0,64709	0,54432	0,44152	0,34375
	3	0,99991	0,99873	0,99411	0,98304	0,96240	0,92953	0,88258	0,82080	0,74474	0,65625
	4	1,00000	0,99995	0,99960	0,99840	0,99536	0,98906	0,97768	0,95904	0,93080	0,89063
	5		1,00000	0,99999	0,99994	0,99976	0,99927	0,99816	0,99590	0,99170	0,98438
7	0	0,69834	0,47830	0,32058	0,20972	0,13348	0,08235	0,04902	0,02799	0,01522	0,00781
	1	0,95562	0,85031	0,71658	0,57672	0,44495	0,32942	0,23380	0,15863	0,10242	0,06250
	2	0,99624	0,97431	0,92623	0,85197	0,75641	0,64707	0,53228	0,41990	0,31644	0,22656
	3	0,99981	0,99727	0,98790	0,96666	0,92944	0,87396	0,80015	0,71021	0,60829	0,50000
	4	0,99999	0,99982	0,99878	0,99533	0,98712	0,97120	0,94439	0,90374	0,84707	0,77344
	5	1,00000	0,99999	0,99993	0,99963	0,99866	0,99621	0,99099	0,98116	0,96429	0,93750
	6		1,00000	1,00000	0,99999	0,99994	0,99978	0,99936	0,99836	0,99626	0,99219
8	0	0,66342	0,43047	0,27249	0,16777	0,10011	0,05765	0,03186	0,01680	0,00837	0,00391
	1	0,94276	0,81310	0,65718	0,50332	0,36708	0,25530	0,16913	0,10638	0,06318	0,03516
	2	0,99421	0,96191	0,89479	0,79692	0,67854	0,55177	0,42781	0,31539	0,22013	0,14453
	3	0,99963	0,99498	0,97865	0,94372	0,88618	0,80590	0,70640	0,59409	0,47696	0,36328
	4	0,99998	0,99957	0,99715	0,98959	0,97270	0,94203	0,89391	0,82633	0,73962	0,63672
	5	1,00000	0,99998	0,99976	0,99877	0,99577	0,98871	0,97468	0,95019	0,91154	0,85547
	6		1,00000	0,99999	0,99992	0,99962	0,99871	0,99643	0,99148	0,98188	0,96484
	7			1,00000	1,00000	0,99998	0,99993	0,99977	0,99934	0,99832	0,99609
9	0	0,63025	0,38742	0,23162	0,13422	0,07508	0,04035	0,02071	0,01008	0,00461	0,00195
	1	0,92879	0,77484	0,59948	0,43621	0,30034	0,19600	0,12109	0,07054	0,03852	0,01953
	2	0,99164	0,94703	0,85915	0,73820	0,60068	0,46283	0,33727	0,23179	0,14950	0,08984
	3	0,99936	0,99167	0,96607	0,91436	0,83427	0,72966	0,60889	0,48261	0,36138	0,25391
	4	0,99997	0,99911	0,99437	0,98042	0,95107	0,90119	0,82828	0,73343	0,62142	0,50000
	5	1,00000	0,99994	0,99937	0,99693	0,99001	0,97471	0,94641	0,90065	0,83418	0,74609
	6		1,00000	0,99995	0,99969	0,99866	0,99571	0,98882	0,97497	0,95023	0,91016
	7			1,00000	0,99998	0,99989	0,99957	0,99860	0,99620	0,99092	0,98047
	8				1,00000	1,00000	0,99998	0,99992	0,99974	0,99924	0,99805

TABELL 7 forts. Binomial-fördelningen; n = 19 (forts.) och 20

n	x	p = 0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
19	9	1,00000	1,00000	0,99986	0,99842	0,99110	0,96745	0,91253	0,81391	0,67104	0,50000
	10			0,99998	0,99969	0,99771	0,98946	0,96531	0,91153	0,81590	0,67620
	11			1,00000	0,99995	0,99952	0,99718	0,98856	0,96477	0,91287	0,82036
	12				0,99999	0,99992	0,99938	0,99691	0,98844	0,96577	0,91647
	13				1,00000	0,99999	0,99989	0,99933	0,99693	0,98907	0,96822
	14					1,00000	0,99999	0,99988	0,99936	0,99724	0,99039
	15						1,00000	0,99999	0,99990	0,99947	0,99779
	16							1,00000	0,99999	0,99993	0,99964
	17								1,00000	0,99999	0,99996
	18									1,00000	1,00000
20	0	0,35849	0,12158	0,03876	0,01153	0,00317	0,00080	0,00018	0,00004	0,00001	0,00000
	1	0,73584	0,39175	0,17556	0,06918	0,02431	0,00764	0,00213	0,00052	0,00011	0,00002
	2	0,92452	0,67693	0,40490	0,20608	0,09126	0,03548	0,01212	0,00361	0,00093	0,00020
	3	0,98410	0,86705	0,64773	0,41145	0,22516	0,10709	0,04438	0,01596	0,00493	0,00129
	4	0,99743	0,95683	0,82985	0,62965	0,41484	0,23751	0,11820	0,05095	0,01886	0,00591
	5	0,99967	0,98875	0,93269	0,80421	0,61717	0,41637	0,24540	0,12560	0,05533	0,02069
	6	0,99997	0,99761	0,97806	0,91331	0,78578	0,60801	0,41663	0,25001	0,12993	0,05766
	7	1,00000	0,99958	0,99408	0,96786	0,89819	0,77227	0,60103	0,41589	0,25201	0,13159
	8		0,99994	0,99867	0,99002	0,95907	0,88667	0,76238	0,59560	0,41431	0,25172
	9		0,99999	0,99975	0,99741	0,98614	0,95204	0,87822	0,75534	0,59136	0,41190
	10		1,00000	0,99996	0,99944	0,99606	0,98286	0,94683	0,87248	0,75071	0,58810
	11			1,00000	0,99990	0,99906	0,99486	0,98042	0,94347	0,86924	0,74828
	12				0,99998	0,99982	0,99872	0,99398	0,97897	0,94197	0,86841
	13				1,00000	0,99997	0,99974	0,99848	0,99353	0,97859	0,94234
	14					1,00000	0,99996	0,99969	0,99839	0,99357	0,97931
	15						0,99999	0,99995	0,99968	0,99847	0,99409
	16						1,00000	0,99999	0,99995	0,99972	0,99871
	17							1,00000	0,99999	0,99996	0,99980
	18								1,00000	1,00000	0,99998
	19										1,00000

7/2

Statistiska institutionen

Stockholms universitet

Rättningsblad

Datum: 28/11-2019

Sal: D499

Tenta: Statistikens grunder 1, kväll

Kurs: Statistikens grunder, kväll

ANONYMKOD: 0004-FZY

☒ Jag godkänner att min tenta får läggas ut anonymt på hemsidan som studentsvar.

OBS! SKRIV ÄVEN PÅ BAKSIDAN AV SKRIVBLADEN

Markera besvarade uppgifter med kryss

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Antal inl. blad
X	X	X	X	X					5
Lär.ant. 20p	20p	20p	5p	20p					

BcKa

POÄNG	BETYG	Lärarens sign.
85p	B	RC

SU, STATISTIK

Skrivsal: D499 Anonymkod: 0004-FZY Blad nr: 1

1) 20 p

Sida 1

Fråga 1

Givet:

Antal år	0	1	2	3	4	5	6
Sannolikhet P(x)	0,05	0,1	0,25	0,3	0,2	0,05	0,05

a) För att Beräkna Var(X) måste vi först Beräkna väntevärdet för X, alltså E(X), låt oss göra detta.

$$E(X) = \sum_x x P(x)$$

$$E(X) = 0 \cdot 0{,}05 + 1 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}25 + 3 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}05 =$$
$$= 0 + 0{,}1 + 0{,}5 + 0{,}9 + 0{,}8 + 0{,}25 + 0{,}3 = 2{,}85.$$

$$Var(X) = \sum_x x^2 P(x) - [E(X)]^2$$

$$Var(X) = (0-2{,}85)^2 \cdot 0{,}05 + (1-2{,}85)^2 \cdot 0{,}1 + (2-2{,}85)^2 \cdot 0{,}25 +$$
$$+ (3-2{,}85)^2 \cdot 0{,}3 + (4-2{,}85)^2 \cdot 0{,}2 + (5-2{,}85)^2 \cdot 0{,}05 + (6-2{,}85)^2 \cdot 0{,}05 =$$
$$= 0{,}406125 + 0{,}34225 + 0{,}180625 + 0{,}00675 + 0{,}2645 + 0{,}231125 +$$
$$+ 0{,}496125 = \boxed{1{,}9275}$$

$$Var(X) = 1{,}9275$$

R

b)

X	0	1	2	3	4	5	6
X^3	0	1	8	27	64	125	216

$$E(X^3) = 0^3 \cdot 0{,}05 + 1^3 \cdot 0{,}1 + 2^3 \cdot 0{,}25 + 3^3 \cdot 0{,}3 + 4^3 \cdot 0{,}2 + 5^3 \cdot 0{,}05 +$$
$$+ 6^3 \cdot 0{,}05 = 0 + 0{,}1 + (8 \cdot 0{,}25) + (27 \cdot 0{,}3) + (64 \cdot 0{,}2) + (125 \cdot 0{,}05) +$$
$$+ (216 \cdot 0{,}05) = 0 + 0{,}1 + 2 + 8{,}1 + 12{,}8 + 6{,}25 + 10{,}8 = \boxed{40{,}05}$$

R

VAR VÄNLIG VÄND BLAD!

c) $P(X>3) = P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) = 0{,}2 + 0{,}05 + 0{,}05 =$
$= 0{,}3$ R

d) $P(X<5) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) =$
$= 0{,}05 + 0{,}1 + 0{,}25 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}9$

$P(X=2) = 0{,}25$

$P(X<5 \cap X=2) = 0{,}25$

Nu kan vi beräkna sannolikheten som är efterfrågad

$P(X=2 \mid X<5) = \dfrac{P(X=2 \cap X<5)}{P(X<5)} = \dfrac{0{,}25}{0{,}9} = 0{,}277778.$

R

SU, STATISTIK

Skrivsal: D499 Anonymkod: 0004-FZY Blad nr: 2

Sida 3

2) 20p

Fråga 2.

Låt P(A) vara andelen av invånarna som har sjukdomen A. Då är $P(\bar{A})$ andelen friska personer.

P(P) – positivt testresultatets sannolikhet

$P(\bar{P})$ – negativt testresultatets sannolikhet

$P(A) = 0{,}15$ $\quad P(P|A) = 0{,}8$

$P(\bar{A}) = 0{,}85$ $\quad P(\bar{P}|\bar{A}) = 0{,}9$

$P(P \cap A) = P(P|A) \cdot P(A) = 0{,}8 \cdot 0{,}15 = 0{,}12$ (sjuk och pos. testres)

$P(\bar{P} \cap \bar{A}) = P(\bar{P}|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0{,}9 \cdot 0{,}85 = 0{,}765$. (frisk och neg test).

Enklast att rita upp i en tabell.

	P	$\bar{P}$	Σ
A	0,12	0,03	0,15
$\bar{A}$	0,085	0,765	0,85
Σ	0,205	0,795	1

Nu kan vi besvara frågorna ☺

a) $P(\bar{P}|A) = \frac{P(\bar{P} \cap A)}{P(A)} = \frac{0{,}03}{0{,}15} = 0{,}2$ R

b) $P(P|\bar{A}) = \frac{P(P \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0{,}085}{0{,}85} = 0{,}1$ R

c) $P(P) = \boxed{0{,}205}$ (se tabell ovan). R

Med formel kan man skriva följande sätt

$P(P) = P(P \cap A) + P(P \cap \bar{A}) = 0{,}12 + 0{,}085 = \boxed{0{,}205}$.

SU, STATISTIK

Skrivsal: D499 Anonymkod: 0004-FZY Blad nr: 3

Sida 4

3) 20p

Fråga 3.

Låt målpopulationen i Jönköping som vill bygga en ny ishall vara X. Man drar ett slumpmässigt stickprov på 20 personer. Alltså antar vi att $X \sim Bin(n=20, p=0{,}4)$.

Låt Y vara de som inte vill bygga en ny ishall, där $Y \sim Bin(n=20, p=0{,}6)$.

a) $P(X \leq 15) = 1 - P(X > 15) = 1 - (P(X=16) + P(X=17) + P(X=18) + P(X=19) + P(X=20)) = 1 - (0{,}99995 - 0{,}99968) - (0{,}99999 - 0{,}99995) - (1 - 0{,}99999) - (1-1) - (1-1) = 0{,}99968$ R

Detta beräknades med hjälp av tabell för binomialfördelningen!

b) $P(X=9) = 0{,}75534 - 0{,}59560 = 0{,}15974$ R

eller med hjälp av formel kan man beräkna också:

$P(X=9) = \dfrac{20!}{9!(20-9)!} \cdot 0{,}4^9 \cdot (1-0{,}4)^{11} = 0{,}159738$ vilket är exakt samma svar som ovan!

c) $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - (0{,}75534 - 0{,}59560) - (0{,}5956 - 0{,}41589) - (0{,}41589 - 0{,}25001) - (0{,}25001 - 0{,}1256) - (0{,}1256 - 0{,}05095) - (0{,}05095 - 0{,}01596) - (0{,}01596 - 0{,}00361) - (0{,}00361 - 0{,}00052) - (0{,}00052 - 0{,}00004) - 0{,}00004 = 0{,}24466$ R

d) $P(Y \leq 5) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2) + P(Y=3) + P(Y=4) + P(Y=5)$

$P(Y=0) = \dfrac{20!}{0!(20-0)!} \cdot 0{,}6^0 \cdot (1-0{,}6)^{20-0} \approx 0$

$P(Y=1) = \dfrac{20!}{1!(20-1)!} \cdot 0{,}6^1 \cdot (1-0{,}6)^{19} \approx 0$

$P(Y=2) = \dfrac{20!}{2!(20-2)!} \cdot 0{,}6^2 \cdot (1-0{,}6)^{18} \approx 0{,}0000047$

Var vänlig VÄND blad!

$$P(Y=3) = \frac{20!}{3!(20-3)!} \cdot 0{,}6^3 \cdot (1-0{,}6)^{17} = 0{,}00004$$

$$P(Y=4) = \frac{20!}{4!(20-4)!} \cdot 0{,}6^4 (1-0{,}6)^{16} = 0{,}000269686$$

$$P(Y=5) = \frac{20!}{5!(20-5)!} \cdot 0{,}6^5 (1-0{,}6)^{15} = 0{,}0012944935$$

$$P(Y \leq 5) \approx 0 + 0 + 0{,}0000047 + 0{,}00004 + 0{,}000269686 +$$
$$+ 0{,}0012944935 = 0{,}0016088795$$

R

SU, STATISTIK

Skrivsal: D499 Anonymkod: 0004-FZY Blad nr: 4

sid 6

4) 5p

Fråga 4

Låt blodsockernivån hos alla rösteräfttigade personer vara X. Då har vi givet att $X \sim N(8, 2)$.

a) $P(X>7) = P(Z > \frac{7-8}{2}) = P(Z > -0,5) = 1 - \Phi(0,5) =$
$= 1 - 0,69146 = 0,30854$

F

b) $P(5 < X < 9) = P(\frac{5-8}{2} < Z < \frac{9-8}{2}) = P(-1,5 < Z < 0,5) =$
$\Phi(0,5) - (1 - \Phi(1,5)) = 0,69146 - 1 + 0,93319 = 0,62465$

R

c) $P(X>6) = P(Z > \frac{6-8}{2}) = P(Z > -1) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0,84134 =$
$= 0,15866$

Låt Y vara stickprovet som valts ut slumpmässigt, då är $Y \sim bin(n=4, p=0,15866)$

$P(Y=3) = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0,15866^3 \cdot (1-0,15866)^{4-3} = 0,013441071$

F

i Frågan står 3 av dem, så jag tolkade detta som att de skulle vara precis 3!

SE LÖSNINGAR

SU, STATISTIK

Skrivsal: D 499 Anonymkod: 0004-FZY Blad nr: 5

Sida 7

Fråga 5

		X 20	30	40	Σ
Y	5	0,3	0,2	0,15	0,65
	10	0,1	0,15	0,1	0,35
	Σ	0,4	0,35	0,25	1

5) 20p

a) Händelse A och B är oberoende av varandra när $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, så låt oss undersöka detta med X och Y.

T. ex. $P(X=20 \cap Y=10) = 0,1$

$P(X=20) = 0,4$; $P(Y=10) = 0,35$

$P(X=20) \cdot P(Y=10) = 0,4 \cdot 0,35 = 0,14$

$0,14 \neq 0,1$ vilket innebär att X och Y är beroende

Alltså är månadsinkomst i Tkr och antal sjukdagar är beroende

R

b) $P(Y=5 | X=30) = \dfrac{P(Y=5 \cap X=30)}{P(X=30)} = \dfrac{0,2}{0,35} = 0,5714285714$

$P(Y=10 | X=30) = \dfrac{P(Y=10 \cap X=30)}{P(X=30)} = \dfrac{0,15}{0,35} = 0,4285714286$

R

c) Vi beräknar först väntevärdet, variansen och kovariansen för att sedan beräkna korrelationen

$E(X) = 20 \cdot 0,4 + 30 \cdot 0,35 + 40 \cdot 0,25 = 28,5$

$E(Y) = 5 \cdot 0,65 + 10 \cdot 0,35 = 6,75$

$Var(X) = (20-28,5)^2 \cdot 0,4 + (30-28,5)^2 \cdot 0,35 + (40-28,5)^2 \cdot 0,25 =$

$= 28,9 + 0,7875 + 33,0625 = 62,75$

R

$Var(Y) = (5-6{,}75)^2 \cdot 0{,}65 + (10-6{,}75)^2 \cdot 0{,}35 = 1{,}990625 + 3{,}696875 =$
$= 5{,}6875$ R

$Cov(X,Y) = 20 \cdot 5 \cdot 0{,}3 + 20 \cdot 10 \cdot 0{,}1 + 30 \cdot 5 \cdot 0{,}2 + 30 \cdot 10 \cdot 0{,}15 +$
$+ 40 \cdot 5 \cdot 0{,}15 + 40 \cdot 10 \cdot 0{,}1 - (28{,}5 \cdot 6{,}75) = 2{,}625$ R

$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} = \frac{2{,}625}{\sqrt{62{,}75 \cdot 5{,}6875}} = \frac{2{,}625}{18{,}891155} \approx 0{,}138951$