STOCKHOLMS UNIVERSITET VT2020
Statistiska institutionen
Michael Carlson (examinator), Maria Anna Di Lucca

Hemtentamen i Regressions- och tidsserieanalys (4.5 hp)

Kurs: Regressionsanalys och undersökningsmetodik

2020-06-08

Skrivtid:	kl. 15.00 - 21.00 (6 timmar)
Godkända hjälpmedel:	Miniräknare, dator, kurslitteratur och föreläsningsanteckningar
Vidhäftade hjälpmedel:	Formelsamling och Statistiska tabeller (endast de tabeller som krävs)

OBS! Det är inte tillåtet att ta hjälp av andra personer under skrivningen.

- Tentamen består av 5 uppgifter, i förekommande fall uppdelade i deluppgifter. Maximalt antal poäng anges per deluppgift.

- Svar med fullständiga redovisningar ska lämnas.
  - För full poäng krävs tydliga, utförliga och väl motiverade lösningar.
  - Kontrollera alltid dina beräkningar och lösningar! Slarvfel kan också ge poängavdrag!
  - Använd minst fem värdesiffror i dina beräkningar (1,2345 och 1234,5 är exempel på tal med fem värdesiffror). I förekommande fall är det inte möjligt pga. avrundning i t.ex. SAS-utskrifter men utgå då ifrån det som är givet. Du kan dock avrunda ditt slutliga svar.

- Tentamen kan maximalt ge 100 poäng och för godkänt resultat krävs minst 50. Betygsgränser:

  A: 90 – 100 p
  B: 80 – 89 p
  C: 70 – 79 p
  D: 60 – 69 p
  E: 50 – 59 p
  Fx: 40 – 49 p
  F: 0 – 40 p

  OBS! Fx och F är underkända betyg som kräver omexamination. Studenter som får betyget Fx kan alltså inte komplettera för högre betyg.

- Lösningsförslag läggs ut på Athena kort efter tentamen.

KONTAKT MED EXAMINATOR UNDER SKRIVNINGEN

- Om det är något som är oklart eller något som verkar konstigt kan du kontakta examinatorn under pågående skrivning via e-post: michael.carlson@stat.su.se eller telefon: 08-16 29 82.
- Undvik att använda Athena för att kontakta examinator.
- Bevaka dock din e-post och Athena under skrivningen för eventuella meddelanden som rör provet.

LYCKA TILL!

Uppgift 1. (35p)

Man vill analysera sambandet mellan begärt pris och slutgiltigt pris (mkr, miljontals kr) vid försäljningar av bostadsrättslägenheter med hjälp av en enkel linjär regressionsmodell. Ett datamaterial för tio försäljningar i Uppsala med avslut andra halvan av november 2016 presenteras i tabellen nedan (källa: Hemnet).

Du ska med en enkel linjär regressionsmodell förklara variabeln $Y =$ slutpris med hjälp av variabeln $X =$ begärt pris, båda i mkr (miljoner kronor).

a) Ange den enkla linjära regressionsmodellen, skatta modellens parametrar och sammanfatta resultatet genom att ange den skattade modellen. (5p)

b) Tolka de skattade parametrarna i ord och kommentera kritiskt. (5p)

c) Beräkna förklaringsgraden R^2 för modellen och kommentera resultatet. (5p)

d) Testa om modellen håller genom att genomföra ett formellt F-test. Ange hypoteserna som du testar, testvariabel och dess fördelning, beslutsregel med kritisk gräns (använd $\alpha = 0.05$) samt beräkningar och slutsats med förklaring. Du behöver inte ange modellantagandena. (8p)

e) Kan du utifrån ditt resultat i d) ovan avgöra vilket utfall du skulle ha fått om du genomförde ett t-test för lutningskoefficienten (med $\alpha = 0.05$)? Dvs. skulle nollhypotesen ska förkastas eller inte? Observera att du inte ska genomföra testet, ange bara noll- och mothypotes och förklara sedan resten i ord. (4p)

f) Skatta med 95% konfidens det genomsnittliga slutpriset då begärt pris är 3 000 000 dvs. skatta $\mu_{y|X=3\text{mkr}}$. Ange vilka förutsättningar och antaganden som krävs, vilken formel du använder, formel med insatta värden, samt beräkningar. Tolka slutligen resultatet. (8p)

i	y_i	x_i	$(y_i - \bar{y})$	$(x_i - \bar{x})$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})$
1	2.025	1.895	0.0275	0.0395	0.000756	0.00156	0.001086
2	2.800	2.695	0.8025	0.8395	0.644006	0.70476	0.673699
3	1.500	1.495	-0.4975	-0.3605	0.247506	0.12996	0.179349
4	2.060	1.595	0.0625	-0.2605	0.003906	0.06786	-0.016280
5	2.710	2.495	0.7125	0.6395	0.507656	0.40896	0.455644
6	2.100	1.895	0.1025	0.0395	0.010506	0.00156	0.004049
7	1.250	1.300	-0.7475	-0.5555	0.558756	0.30858	0.415236
8	1.295	1.295	-0.7025	-0.5605	0.493506	0.31416	0.393751
9	2.335	2.195	0.3375	0.3395	0.113906	0.11526	0.114581
10	1.900	1.695	-0.0975	-0.1605	0.009506	0.02576	0.015649
Σ	**19.975**	**18.555**	**0**	**0**	**2.590013**	**2.078423**	**2.236763**

Uppgift 2. (35p)

I en medicinsk studie samlades uppgifter in för $n = 32$ män, samtliga över 40 år. Man mätte det systoliska blodtrycket (Y) och registrerade ålder räknat i år (x_1), om man var rökare ($x_2 = 0$ om ej rökare och $x_2 = 1$ om rökare) samt kroppsstorlek[1] (x_3). Tre olika modeller skattades:

Modell 1: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \varepsilon_i$

Modell 2: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$

Modell 3: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + \varepsilon_i$

På nästa sida finner du ofullständiga SAS-utskrifter för var och en av de skattade modellerna. Kom ihåg att värdena för parametrarna $\beta_0, \dots, \beta_3$ är olika i de olika modellerna.

a) Sammanställ en tabell som för var och en av modellerna redovisar residualvariansen s_e^2, förklaringsgrad R^2, observerad F-kvot F_{obs} och det kritiska värdet för F-testet, F_{krit} (använd $\alpha = 0.05$). Ange vilka formler du använder för de tre första. (12p)

b) Beräkna 95% konfidensintervall för var och en av lutningskoefficienterna i Modell 3 och tolka resultaten. Vad är det man typiskt tittar efter i ett konfidensintervall när man ska värdera variabelns betydelse för modellen? (6p)

c) Utifrån dina resultat i a) och b) ovan, vilken av de tre modellerna skulle du välja? Motivera ditt svar. Är det säkerställt att samtliga lutningskoefficienter är signifikanta i den valda modellen? (6p)

d) Förklara för en nybörjare de antaganden som ska vara uppfyllda i en multipel regressionsmodell. Det räcker inte att bara lista dem. Men skriv kortfattat! Ca 1-1½ A4 bör räcka. (6p)

e) I Modell 2 har man två förklaringsvariabler, X_1 och X_2. Beräkna med hjälp av korrelationsmatrisen nedan variansinflationsfaktorerna för dessa två och kommentera resultatet. Är det bra eller dåligt? (5p)

	Y	X_1	X_2	X_3
Y	1			
X_1	0.775	1		
X_2	0.247	-0.139	1	
X_3	0.742	0.803	-0.0714	1

[1] Kroppsstorlek mäts här med det s.k. Quetelet indexet som är samma sak som BMI (*body mass index*). I denna uppgift är data dock baserat på USA mått; vi har pound för kroppsvikt (1 $lb \approx 0.45359$ kg) och tum för kroppslängd (1 tum $= 25.4$ cm). BMI är normalt baserat på det metriska systemet och det gäller att 1 USA QUET ≈ 7 BMI.

Modell 1:

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model		3 861.630			
Error		2 564.338			
Corrected Total					

Parameter Estimates					
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|
Intercept	1	59.092	12.816		
X1 (age)	1	1.6045	0.2387		

Modell 2:

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model		4 689.684			
Error		1 736.285			
Corrected Total					

Parameter Estimates						
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|	Variance Inflation
Intercept	1	48.050	11.12956			0
X1 (age)	1	1.7092	0.201759			
X2 (smk)	1	10.294	2.768107			

Modell 3:

Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Model		4 889.826			
Error		1 536.143			
Corrected Total					

Parameter Estimates						
Variable	DF	Parameter Estimate	Standard Error	t Value	Pr > |t|	Variance Inflation
Intercept	1	45.103	10.76488			0
X1 (age)	1	1.2127	0.323819			
X2 (smk)	1	9.9456	2.656057			
X3 (quet)	1	0.0085924	0.0044987			

Uppgift 3. (10p)

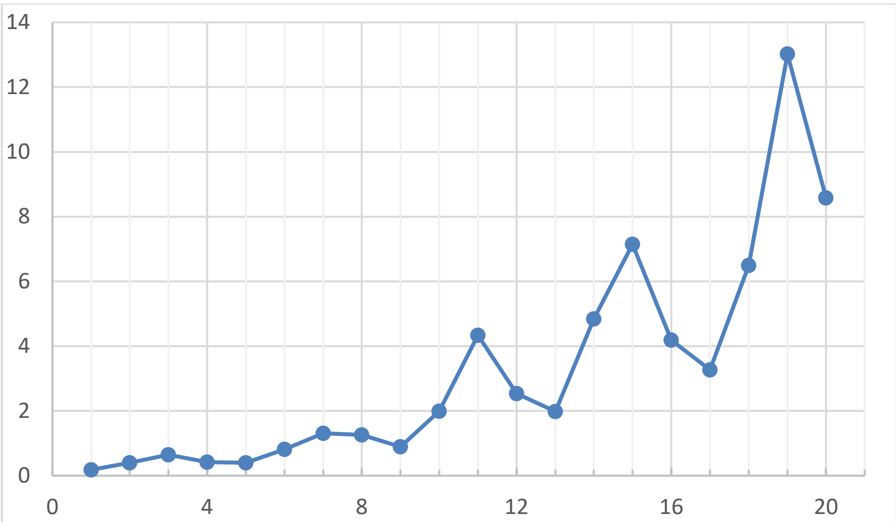
För var och en av följande deluppgifter ska du svara kortfattat. Hela uppgiften bör kunna redovisas på maximalt ca 1-1½ A4-sidor. Du får gärna komplettera med bilder och skisser.

a) Förklara vad som menas med ett s.k. spuriöst samband och ge ett exempel på hur det kan uppstå. (5p)

b) I samband med polynomregression talas det om överanpassning (*overfitting*). Förklara detta och vilka risker det medför. Kan det inträffa även i andra sammanhang än i polynomregression? Förklara! (5p)

Uppgift 4. (10p)

En tidsserie med kvartalsdata under fem år visas i diagrammet nedan, totalt $n = 5 \cdot 4 = 20$ tidpunkter. Första tidpunkten motsvarar alltså kvartal 1, år 1.



a) Utgå ifrån de olika grundkomponenter som en tidsserie består av och beskriv tidsserien i ord. Skriv kortfattat men försök att fånga upp allt som är relevant. Hur varierar serien? Vilken sorts modell är lämplig? (5p)

Tidsseriens observerade värden transformerades varpå en regressionsmodell med dummyvariabler för kvartalen skattades. Resultatet blev

$$\ln(y_t) = -2.8071 + 0.46123 \cdot t + 1.1023 \cdot Q_2 + 3.0234 \cdot Q_3 + 0.67129 \cdot Q_4$$

där t betecknar tidpunkten $1, \ldots, 20$ och Q_p är dummyvariablerna som indikerar respektive kvartal $p = 2, 3$ och 4.

b) Beräkna prognoser för varje kvartal för hela det kommande året. (5p)

Uppgift 5. (10p)

I en analys användes logistisk regression för att modellera sannolikheten att spekulanter på bostadsrätter fullföljde köpet. Totalt hade man $n = 673$ budgivare och modellen definierades enligt följande (notera alternativbeteckningarna i SAS-utskriften):

$$\text{LogOdds}(Y = 1|x_1, x_2, x_3) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$$

där

$$Y = \text{Buy} = \begin{cases} 0, & \text{köpte inte} \\ 1, & \text{köpte} \end{cases} \qquad x_1 = \text{Income} = \text{årsinkomst i USD}$$

$$x_2 = \text{Is\_Female} = \begin{cases} 0, & \text{man} \\ 1, & \text{kvinna} \end{cases} \qquad x_3 = \text{Dual\_income} = \begin{cases} 1, & \text{två inkomster} \\ 0, & \text{en inkomst} \end{cases}$$

För x_1 gäller att $\bar{x}_1 = 35\,079$ och $s_{x_1} = 23\,813$ USD. Variabeln x_3 indikerar om budgivaren tillhör ett hushåll med två (eller fler) inkomsttagare.

Response Profile		
Ordered Value	**Buy**	**Total Frequency**
1	Köpte inte	548
2	Köpte	125

Analysis of Maximum Likelihood Estimates					
Parameter	**DF**	**Estimate**	**Standard Error**	**Wald Chi-Square**	**Pr > ChiSq**
Intercept	1	-11.3828	1.1185	103.5758	<.0001
Income	1	0.000163	0.000016	105.9314	<.0001
Is_Female	1	1.3420	0.3719	13.0240	0.0003
Dual_Income	1	1.0606	0.3547	8.9403	0.0028

Odds Ratio Estimates			
Effect	**Point Estimate**	**95% Wald Confidence Limits**	
Income	1.000	1.000	1.000
Is_Female	3.827	1.846	7.931
Dual_Income	2.888	1.441	5.788

a) Beräkna sannolikheten att en kvinnlig budgivare med en årsinkomst lika med 40 000 USD som tillhör ett hushåll med två (eller fler) inkomstkällor köper bostadsrätten som hon lagt bud på. (5p)

b) Beräkna ett 95% konfidensintervall för oddskvoten $\text{OR}(X_1)$, inkomst, med sex decimalers noggrannhet och jämför med SAS-utskriften ovan. Skulle du våga påstå att årsinkomst har betydelse för att predicera sannolikheten för $Y = 1$? Kan du förklara varför koefficienten β_1 är så pass liten jämfört med de andra koefficienterna? (5p)

FORMELSAMLING

DESKRIPTIV STATISTIK

Varians: $s_x^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}$

Kovarians: $s_{xy} = cov(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n-1}$

$= \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(n-1)}$

Korrelation: $r_{xy} = corr(x,y) = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 \cdot s_y^2}}$ Inferens: $t_{n-2} = \frac{r_{xy}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{xy}^2}}$

ENKEL LINJÄR REGRESSION

Modell: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$ Betingat medelvärde för $Y|X = x$: $\mu_{Y|X=x} = \beta_0 + \beta_1 x$

Parameterskattningar och dessas varianser:

$b_1 = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$ $s_{b_1}^2 = \frac{s_e^2}{(n-1)s_x^2} = \frac{s_e^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$

$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}$ $s_{b_0}^2 = s_e^2\left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{(n-1)s_x^2}\right)$

Prediktion och skattat betingat medelvärde:	$\hat{y}_i = \hat{\mu}_{Y\|X=x_i} = b_0 + b_1 x_i$
Prediktionsintervall för prediktionen $\hat{y}_i$ givet $X = x$:	$\hat{y}_i \pm t_{n-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{s_e^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}\right)}$
Konfidensintervall för det betingade medelvärdet $\mu_{Y\|X=x}$ givet $X = x$:	$\hat{\mu}_{Y\|X=x} \pm t_{n-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{s_e^2\left(\frac{1}{n} + \frac{(x-\bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}\right)}$

ICKE-LINJÄR REGRESSION, exempel

Andragradspolynom:	$\hat{y}_i = a + b_1 x_i + b_2 x_i^2$	
Exponentiell:	$\widehat{\ln(y_i)} = a' + b' x_i$	$\hat{y}_i = \exp(a' + b' x_i) = \left(e^{a'}\right)\left(e^{b'}\right)^{x_i} = a \cdot b^{x_i}$
	$\widehat{\log_{10}(y_i)} = a' + b' x_i$	$\hat{y}_i = 10^{a' + b' x_i} = \left(10^{a'}\right)(10^{b})^{x_i} = a \cdot b^{x_i}$

ENKEL OCH MULTIPEL LINJÄR REGRESSION (sätt $k=1$ om enkel regression)

Residualvarians: $s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-k-1} = \frac{SSE}{n-k-1} = MSE$

Kvadratsummor: $SST = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = (n-1)s_y^2 \quad = \quad SSR + SSE$

$SSE = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n e_i^2 = (n-k-1)s_e^2$

$SSR = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2$ = [om enkel regression] $= b^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

Förklaringsgrad: $R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$ $\qquad R^2_{\text{adj}} = 1 - \frac{SSE/(n-k-1)}{SST/(n-1)}$

Inferens för β_j: KI: $b_j \pm t_{n-k-1,\alpha/2} \cdot s_{b_j}$ $\qquad$ Test: $t_{n-k-1} = \frac{b_j - \beta_j^*}{s_{b_j}}$

Test för hela modellen: $F_{k;n-k-1} = \frac{SSR/k}{SSE/(n-k-1)} = \frac{MSR}{MSE}$

Beräkningsformler för KORRELATION och REGRESSIONSKOEFFICIENT

$$b_1 = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\,/(n-1)}{\sum (x_i - \bar{x})^2\,/(n-1)} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \frac{s_x s_y}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \cdot \frac{s_y}{s_x} = r_{xy} \cdot \frac{s_y}{s_x}$$

$$r_{xy} = \frac{n\sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \cdot \sqrt{n\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2}} = \frac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \cdot \sqrt{\sum y_i^2 - n\bar{y}^2}}$$

$$= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\,/(n-1)}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2/(n-1)} \cdot \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2\,/(n-1)}}$$

$$= \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2} \cdot \sqrt{s_y^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} \cdot \frac{s_x}{s_x} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \frac{s_x}{s_y} = b_1 \cdot \frac{s_x}{s_y}$$

TIDSSERIEANALYS

– Komponenter

Additiv modell: $Y_t = T_t + S_t + C_t + E_t$ Multiplikativ modell: $Y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot E_t$

där T = trend, S = säsong, C = cyklisk/konjunktur samt E = slumpkomponent

- Skattning av trendkomponenten:

– med glidande medelvärden utan säsongvariation, exempel:

3-punkter centrerat: $\hat{T}_t = \frac{1}{3} \cdot y_{t-1} + \frac{1}{3} \cdot y_t + \frac{1}{3} \cdot y_{t+1}$

5-punkter centrerat: $\hat{T}_t = \frac{1}{5} \cdot y_{t-2} + \frac{1}{5} \cdot y_{t-1} + \frac{1}{5} \cdot y_t + \frac{1}{5} \cdot y_{t+1} + \frac{1}{5} \cdot y_{t+2}$

– med centrerade glidande medelvärden med säsongvariation, exempel:

halvårsdata: $\hat{T}_t = \frac{1}{4} \cdot y_{t-1} + \frac{1}{2} \cdot y_t + \frac{1}{4} \cdot y_{t+1}$

kvartalsdata: $\hat{T}_t = \frac{1}{8} \cdot y_{t-2} + \frac{1}{4} \cdot y_{t-1} + \frac{1}{4} \cdot y_t + \frac{1}{4} y_{t+1} + \frac{1}{8} \cdot y_{t+2}$

månadsdata: $\hat{T}_t = \frac{1}{24} \cdot y_{t-6} + \frac{1}{12} \cdot y_{t-5} + \cdots + \frac{1}{12} \cdot y_{t+5} + \frac{1}{24} \cdot y_{t+6}$

– med regressionsanalys, linjär trend och exponentiell trend:

Modell: $Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_1$ Skattad modell: $\hat{y}_t = b_0 + b_1 t = \hat{T}_t$

$\ln Y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_1$ $\hat{y}_t = \exp(b_0 + b_1 t) = \hat{T}_t$

- Justering av säsongsindex $\bar{S}_j$ med p säsonger (halvår, kvartal el. månader osv.):

Additiv modell: $S_j^+ = \bar{S}_j - \left(\frac{\sum \bar{S}_i}{p}\right)$ Multiplikativ modell: $S_j^+ = \frac{\bar{S}_j}{(\sum \bar{S}_i / p)}$

- Trend- och säsongsrensning:

Additiv modell: $y_t - \hat{T}_t$ resp. $y_t - S_t^+$ Multiplikativ modell: $y_t / \hat{T}_t$ resp. y_t / S_t^+

LOGISTISK REGRESSION och ODDS

Odds för en händelse A:	$\text{Odds}(A) = \dfrac{P(A)}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(A)}{1 - P(A)} \iff P(A) = \dfrac{\text{Odds}(A)}{1 + \text{Odds}(A)}$
Oddskvot för händelsen A mot B:	$\text{OR} = \dfrac{\text{Odds}(A)}{\text{Odds}(B)}$

- Logistisk regression:

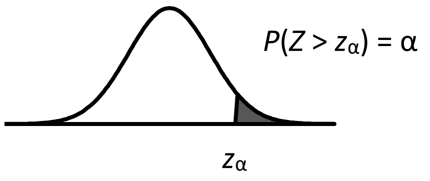
Enkel modell:	$P(Y = 1 \mid x) = \dfrac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)} = \dfrac{1}{1 + \exp(-\beta_0 - \beta_1 x)}$ $P(Y = 0 \mid x) = \dfrac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)}$ $\text{Odds}(Y = 1 \mid x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x)$ $\text{LogOdds}(Y = 1 \mid x) = \beta_0 + \beta_1 x$
Multipel modell:	$\text{LogOdds}(Y = 1 \mid x_1, \dots x_k) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k$

Intercept β_0:	$P(Y = 1 \mid x_1 = \cdots = x_k = 0) = \dfrac{\exp(\beta_0)}{1 + \exp(\beta_0)}$
Oddskvot för $Y = 1$ när $X_j = x_j + 1$ mot $X_j = x_j$:	$\text{OR}(X_j) = \dfrac{\text{Odds}\big(Y = 1 \big\vert x_j + 1, \text{allt annat lika}\big)}{\text{Odds}\big(Y = 1 \big\vert x_j, \text{allt annat lika}\big)} = \exp\big(\beta_j\big)$
KI för $\text{OR}(X_j)$:	$\Big(\exp(b_j - z_{\alpha/2} \cdot s_{b_j})\ ;\ \exp(b_j + z_{\alpha/2} \cdot s_{b_j})\Big)$

TABELL 2. Normalfördelningens kvantiler, standardiserad

$Z \in N(0, 1)$. Vilket värde har z_α om $P(Z > z_\alpha) = \alpha$ där α är en given sannolikhet.

Utnyttja även $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ för $P(Z \leq -z_\alpha)$.

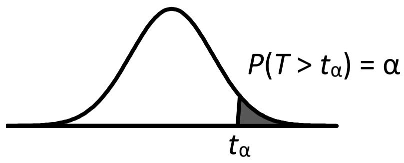


α	z_α
0,25	0,6745
0,10	1,2816
0,05	1,6449
0,025	1,9600
0,010	2,3263
0,005	2,5758
0,0025	2,8070
0,0010	3,0902
0,0005	3,2905
0,00025	3,4808
0,00010	3,7190
0,00005	3,8906
0,000025	4,0556
0,000010	4,2649
0,000005	4,4172

TABELL 3. *t*-fördelningens kvantiler

$T \in t(\nu)$ där ν = antal frihetsgrader.

Vilket värde har t_α om $P(T > t_\alpha) = \alpha$ där α är en given sannolikhet. Utnyttja även $P(T \le -t_\alpha) = P(T > t_\alpha)$.



ν	α = 0,1	0,05	0,025	0,010	0,005	0,0025	0,0010	0,0005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	127,321	318,309	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,327	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,215	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,893	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
35	1,306	1,690	2,030	2,438	2,724	2,996	3,340	3,591
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
45	1,301	1,679	2,014	2,412	2,690	2,952	3,281	3,520
50	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
55	1,297	1,673	2,004	2,396	2,668	2,925	3,245	3,476
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
65	1,295	1,669	1,997	2,385	2,654	2,906	3,220	3,447
70	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	2,899	3,211	3,435
75	1,293	1,665	1,992	2,377	2,643	2,892	3,202	3,425

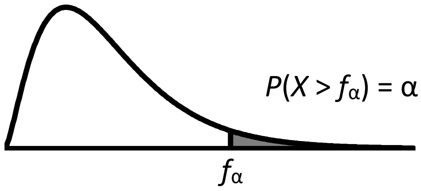
Forts. nästa sida

TABELL 3 forts. *t*-fördelningens kvantiler

ν	α = 0,1	0,05	0,025	0,010	0,005	0,0025	0,0010	0,0005
80	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,195	3,416
85	1,292	1,663	1,988	2,371	2,635	2,882	3,189	3,409
90	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	2,878	3,183	3,402
95	1,291	1,661	1,985	2,366	2,629	2,874	3,178	3,396
100	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
125	1,288	1,657	1,979	2,357	2,616	2,858	3,157	3,370
150	1,287	1,655	1,976	2,351	2,609	2,849	3,145	3,357
175	1,286	1,654	1,974	2,348	2,604	2,843	3,137	3,347
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	2,839	3,131	3,340
300	1,284	1,650	1,968	2,339	2,592	2,828	3,118	3,323
400	1,284	1,649	1,966	2,336	2,588	2,823	3,111	3,315
500	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	2,820	3,107	3,310
1000	1,282	1,646	1,962	2,330	2,581	2,813	3,098	3,300
2000	1,282	1,646	1,961	2,328	2,578	2,810	3,094	3,295
3000	1,282	1,645	1,961	2,328	2,577	2,809	3,093	3,294
4000	1,282	1,645	1,961	2,327	2,577	2,809	3,092	3,293
5000	1,282	1,645	1,960	2,327	2,577	2,808	3,092	3,292

TABELL 5. *F*-fördelningens kvantiler

$X \in F(\nu_1,\nu_2)$ där ν_1,ν_2 = antal frihetsgrader i täljaren respektive nämnaren. Vilket värde har f_α om $P(X > f_\alpha) = \alpha$ där α är en given sannolikhet.



α = 0,05

	ν_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\nu_2 = 1$	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,99	1,96
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,92	1,89
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89	1,87
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,84	1,81
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79	1,77
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75	1,72	1,69	1,67

Forts. nästa sida

TABELL 5 forts. *F*-fördelningens kvantiler

***α* = 0,05**

	$\nu_1 =$ 16	17	18	19	20	25	30	35	40	50	60	70	80	100	∞
$\nu_2 = 1$	246,5	246,9	247,3	247,7	248,0	249,3	250,1	250,7	251,1	251,8	252,2	252,5	252,7	253,0	254,3
2	19,43	19,44	19,44	19,44	19,45	19,46	19,46	19,47	19,47	19,48	19,48	19,48	19,48	19,49	19,50
3	8,69	8,68	8,67	8,67	8,66	8,63	8,62	8,60	8,59	8,58	8,57	8,57	8,56	8,55	8,53
4	5,84	5,83	5,82	5,81	5,80	5,77	5,75	5,73	5,72	5,70	5,69	5,68	5,67	5,66	5,63
5	4,60	4,59	4,58	4,57	4,56	4,52	4,50	4,48	4,46	4,44	4,43	4,42	4,41	4,41	4,37
6	3,92	3,91	3,90	3,88	3,87	3,83	3,81	3,79	3,77	3,75	3,74	3,73	3,72	3,71	3,67
7	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44	3,40	3,38	3,36	3,34	3,32	3,30	3,29	3,29	3,27	3,23
8	3,20	3,19	3,17	3,16	3,15	3,11	3,08	3,06	3,04	3,02	3,01	2,99	2,99	2,97	2,93
9	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94	2,89	2,86	2,84	2,83	2,80	2,79	2,78	2,77	2,76	2,71
10	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77	2,73	2,70	2,68	2,66	2,64	2,62	2,61	2,60	2,59	2,54
11	2,70	2,69	2,67	2,66	2,65	2,60	2,57	2,55	2,53	2,51	2,49	2,48	2,47	2,46	2,40
12	2,60	2,58	2,57	2,56	2,54	2,50	2,47	2,44	2,43	2,40	2,38	2,37	2,36	2,35	2,30
13	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46	2,41	2,38	2,36	2,34	2,31	2,30	2,28	2,27	2,26	2,21
14	2,44	2,43	2,41	2,40	2,39	2,34	2,31	2,28	2,27	2,24	2,22	2,21	2,20	2,19	2,13
15	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,15	2,14	2,12	2,07
16	2,33	2,32	2,30	2,29	2,28	2,23	2,19	2,17	2,15	2,12	2,11	2,09	2,08	2,07	2,01
17	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,06	2,05	2,03	2,02	1,96
18	2,25	2,23	2,22	2,20	2,19	2,14	2,11	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,98	1,92
19	2,21	2,20	2,18	2,17	2,16	2,11	2,07	2,05	2,03	2,00	1,98	1,97	1,96	1,94	1,88
20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12	2,07	2,04	2,01	1,99	1,97	1,95	1,93	1,92	1,91	1,84
25	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	1,96	1,92	1,89	1,87	1,84	1,82	1,81	1,80	1,78	1,71
30	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93	1,88	1,84	1,81	1,79	1,76	1,74	1,72	1,71	1,70	1,62
35	1,94	1,92	1,91	1,89	1,88	1,82	1,79	1,76	1,74	1,70	1,68	1,66	1,65	1,63	1,56
40	1,90	1,89	1,87	1,85	1,84	1,78	1,74	1,72	1,69	1,66	1,64	1,62	1,61	1,59	1,51
45	1,87	1,86	1,84	1,82	1,81	1,75	1,71	1,68	1,66	1,63	1,60	1,59	1,57	1,55	1,47
50	1,85	1,83	1,81	1,80	1,78	1,73	1,69	1,66	1,63	1,60	1,58	1,56	1,54	1,52	1,44
60	1,82	1,80	1,78	1,76	1,75	1,69	1,65	1,62	1,59	1,56	1,53	1,52	1,50	1,48	1,39
70	1,79	1,77	1,75	1,74	1,72	1,66	1,62	1,59	1,57	1,53	1,50	1,49	1,47	1,45	1,35
80	1,77	1,75	1,73	1,72	1,70	1,64	1,60	1,57	1,54	1,51	1,48	1,46	1,45	1,43	1,32
100	1,75	1,73	1,71	1,69	1,68	1,62	1,57	1,54	1,52	1,48	1,45	1,43	1,41	1,39	1,28
∞	1,64	1,62	1,60	1,59	1,57	1,51	1,46	1,42	1,39	1,35	1,32	1,29	1,27	1,24	1,00

TABELL 5 forts. F-fördelningens kvantiler

α = 0,01

	ν_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\nu_2 = 1$	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6106	6126	6143	6157
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,39	99,40	99,41	99,42	99,42	99,43	99,43
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,35	27,23	27,13	27,05	26,98	26,92	26,87
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55	14,45	14,37	14,31	14,25	14,20
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05	9,96	9,89	9,82	9,77	9,72
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72	7,66	7,60	7,56
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47	6,41	6,36	6,31
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67	5,61	5,56	5,52
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11	5,05	5,01	4,96
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71	4,65	4,60	4,56
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40	4,34	4,29	4,25
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16	4,10	4,05	4,01
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96	3,91	3,86	3,82
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80	3,75	3,70	3,66
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67	3,61	3,56	3,52
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,62	3,55	3,50	3,45	3,41
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,46	3,40	3,35	3,31
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51	3,43	3,37	3,32	3,27	3,23
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43	3,36	3,30	3,24	3,19	3,15
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,09
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13	3,06	2,99	2,94	2,89	2,85
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98	2,91	2,84	2,79	2,74	2,70
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88	2,80	2,74	2,69	2,64	2,60
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80	2,73	2,66	2,61	2,56	2,52
45	7,23	5,11	4,25	3,77	3,45	3,23	3,07	2,94	2,83	2,74	2,67	2,61	2,55	2,51	2,46
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70	2,63	2,56	2,51	2,46	2,42
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63	2,56	2,50	2,44	2,39	2,35
70	7,01	4,92	4,07	3,60	3,29	3,07	2,91	2,78	2,67	2,59	2,51	2,45	2,40	2,35	2,31
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55	2,48	2,42	2,36	2,31	2,27
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50	2,43	2,37	2,31	2,27	2,22
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,41	2,32	2,25	2,18	2,13	2,08	2,04

Forts. nästa sida

TABELL 5 forts. F-fördelningens kvantiler

α = 0,01

	$\nu_1 =$ 16	17	18	19	20	25	30	35	40	50	60	70	80	100	∞
$\nu_2 = 1$	6170	6181	6192	6201	6209	6240	6261	6276	6287	6303	6313	6321	6326	6334	6366
2	99,44	99,44	99,44	99,45	99,45	99,46	99,47	99,47	99,47	99,48	99,48	99,48	99,49	99,49	99,50
3	26,83	26,79	26,75	26,72	26,69	26,58	26,50	26,45	26,41	26,35	26,32	26,29	26,27	26,24	26,13
4	14,15	14,11	14,08	14,05	14,02	13,91	13,84	13,79	13,75	13,69	13,65	13,63	13,61	13,58	13,46
5	9,68	9,64	9,61	9,58	9,55	9,45	9,38	9,33	9,29	9,24	9,20	9,18	9,16	9,13	9,02
6	7,52	7,48	7,45	7,42	7,40	7,30	7,23	7,18	7,14	7,09	7,06	7,03	7,01	6,99	6,88
7	6,28	6,24	6,21	6,18	6,16	6,06	5,99	5,94	5,91	5,86	5,82	5,80	5,78	5,75	5,65
8	5,48	5,44	5,41	5,38	5,36	5,26	5,20	5,15	5,12	5,07	5,03	5,01	4,99	4,96	4,86
9	4,92	4,89	4,86	4,83	4,81	4,71	4,65	4,60	4,57	4,52	4,48	4,46	4,44	4,41	4,31
10	4,52	4,49	4,46	4,43	4,41	4,31	4,25	4,20	4,17	4,12	4,08	4,06	4,04	4,01	3,91
11	4,21	4,18	4,15	4,12	4,10	4,01	3,94	3,89	3,86	3,81	3,78	3,75	3,73	3,71	3,60
12	3,97	3,94	3,91	3,88	3,86	3,76	3,70	3,65	3,62	3,57	3,54	3,51	3,49	3,47	3,36
13	3,78	3,75	3,72	3,69	3,66	3,57	3,51	3,46	3,43	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27	3,17
14	3,62	3,59	3,56	3,53	3,51	3,41	3,35	3,30	3,27	3,22	3,18	3,16	3,14	3,11	3,00
15	3,49	3,45	3,42	3,40	3,37	3,28	3,21	3,17	3,13	3,08	3,05	3,02	3,00	2,98	2,87
16	3,37	3,34	3,31	3,28	3,26	3,16	3,10	3,05	3,02	2,97	2,93	2,91	2,89	2,86	2,75
17	3,27	3,24	3,21	3,19	3,16	3,07	3,00	2,96	2,92	2,87	2,83	2,81	2,79	2,76	2,65
18	3,19	3,16	3,13	3,10	3,08	2,98	2,92	2,87	2,84	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,57
19	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00	2,91	2,84	2,80	2,76	2,71	2,67	2,65	2,63	2,60	2,49
20	3,05	3,02	2,99	2,96	2,94	2,84	2,78	2,73	2,69	2,64	2,61	2,58	2,56	2,54	2,42
25	2,81	2,78	2,75	2,72	2,70	2,60	2,54	2,49	2,45	2,40	2,36	2,34	2,32	2,29	2,17
30	2,66	2,63	2,60	2,57	2,55	2,45	2,39	2,34	2,30	2,25	2,21	2,18	2,16	2,13	2,01
35	2,56	2,53	2,50	2,47	2,44	2,35	2,28	2,23	2,19	2,14	2,10	2,07	2,05	2,02	1,89
40	2,48	2,45	2,42	2,39	2,37	2,27	2,20	2,15	2,11	2,06	2,02	1,99	1,97	1,94	1,80
45	2,43	2,39	2,36	2,34	2,31	2,21	2,14	2,09	2,05	2,00	1,96	1,93	1,91	1,88	1,74
50	2,38	2,35	2,32	2,29	2,27	2,17	2,10	2,05	2,01	1,95	1,91	1,88	1,86	1,82	1,68
60	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,10	2,03	1,98	1,94	1,88	1,84	1,81	1,78	1,75	1,60
70	2,27	2,23	2,20	2,18	2,15	2,05	1,98	1,93	1,89	1,83	1,78	1,75	1,73	1,70	1,54
80	2,23	2,20	2,17	2,14	2,12	2,01	1,94	1,89	1,85	1,79	1,75	1,71	1,69	1,65	1,49
100	2,19	2,15	2,12	2,09	2,07	1,97	1,89	1,84	1,80	1,74	1,69	1,66	1,63	1,60	1,43
∞	2,00	1,97	1,93	1,90	1,88	1,77	1,70	1,64	1,59	1,52	1,47	1,43	1,40	1,36	1,00